TEMPO DE PROVA: 2h 30min

Questão 1: (1.0 ponto)
Analise a convergência das séries abaixo

(a) (0.5 ponto) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n!}{n^n}$,

(b) (0.5 ponto) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Questão 2: (2.0 pontos)
Determine os coeficientes a_n e b_n da expansão da função $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$ em série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ (em torno do ponto 0) e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(x+3)^n$ (em torno do ponto -3) e calcule os raios de convergência correspondentes.

Questão 3: (2.5 pontos)

(a) (1.5 ponto) Usando a definição da transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ de uma função $f(t)$, mostre que

$$\frac{d}{ds}F(s) = \mathcal{L}\{-t f(t)\}.$$

Use esse resultado para calcular a transformada de Laplace inversa da função

$$F(s) = \ln\left(\frac{1+s}{1-s}\right).$$

(b) (1.0 ponto) Calcule a transformada de Laplace inversa $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ da função

$$F(s) = \left\{\frac{3s-2}{s^2-2s+5}e^{-2s}\right\}.$$

Questão 4: (2.0 pontos)
Resolva o seguinte problema de valor inicial utilizando a transformada de Laplace

$$\begin{cases} y''(t) + 2\,y'(t) + y(t) = e^{-t} + \delta(t-2\pi)\cos t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Questão 5: (2.5 pontos)
Considere a equação diferencial

$$(1+x^2)\,y''(x) + x\,y'(x) - y(x) = 0.$$

(a) (1.5 ponto) Determine a relação de recorrência dos coeficientes a_n da solução $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

(b) (1 ponto) Determine a solução tal que $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

LEMBRETES NO VERSO

1. Limites
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

2. Tabela básica de transformada de Laplace
   - $\mathcal{L}\left\{u_c(t)\cdot g(t-c)\right\} = e^{-cs}G(s)$
   - $\mathcal{L}\left\{e^{ct}g(t)\right\} = G(s-c)$
   - $\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$
   - $\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$
   - $\mathcal{L}\{\text{senh}(at)\} = \dfrac{a}{s^2-a^2}$
   - $\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \dfrac{s}{s^2-a^2}$
   - $\mathcal{L}\left\{\delta(t-c)f(t)\right\} = e^{-cs}f(c)$
   - $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(s)$
   - $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$
   - $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$