Questão 1: (2.0 pontos)
Classifique as séries abaixo em absolutamente convergente, divergente ou condicionalmente convergente. Justifique as suas afirmações.

(a) (1.0 ponto) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \ln n}{(n+1)^3}$

(b) (1.0 ponto) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+1)^{1/3}}$

Questão 2: (1.5 ponto)
Determine o raio e o intervalo de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n}}{2^{2n} n^2}$.

Questão 3: (3.0 pontos)
Considere a equação diferencial dada abaixo:

$$2x\, y''(x) + (1+x)y'(x) + y(x) = 0, \qquad x \in (0, \infty)\,.$$

(a) (1.0 ponto) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação diferencial;

(b) (1.0 ponto) Determine a relação de recorrência;

(c) (1.0 ponto) Obtenha a solução $y_1(x)$ correspondente à maior raiz da equação indicial.

Questão 4: (3.5 pontos)
Faça o que se pede

(a) (1.0 ponto) Determine a $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+1)e^{-2s}}{2s^2+4s+10}\right\}$

(b) (2.5 pontos) Utilizando a Transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = f(t); \\ y(0) = y'(0) = 0, \end{cases} \qquad \text{onde} \qquad f(t) = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 \leqslant t < 1, \\ 5e^{t-1}, & \text{se } t \geqslant 1. \end{cases}$$

Regras:

- Duração da prova: 150 minutos
- Não é permitido (nem necessário) o uso de calculadoras, consulta a qualquer fonte e nem se ausentar da sala por qualquer motivo.
- Mantenham os celulares e similares desligados e dentro das bolsas/mochilas. As bolsas e mochilas deverão ser guardadas na mesa do professor ou junto ao quadro em local afastado do aluno.

TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE NO VERSO

Tabela Básica de Transformadas de Laplace

- $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$, $s > 0$
- $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \dfrac{1}{s-a}$, $s > a$
- $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$, com n sendo um inteiro
- $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
- $\mathcal{L}\{\cos at)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$
- $\mathcal{L}\{u_c(t).g(t-c)\} = e^{-cs}G(s)$
- $\mathcal{L}\left\{e^{ct}g(t)\right\} = G(s-c)$
- $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\} = F(s).G(s)$
- $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(s)$
- $\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\} = F^{(n)}(s)$