Questão 1: (2.0 pontos)
Classifique as séries abaixo em absolutamente convergente, divergente ou condicionalmente convergente. Justifique as suas afirmações.

(a) (0.7 ponto) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n\, n!}{n^n}$

(b) (0.7 ponto) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$

(c) (0.6 ponto) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{1/3}}{1+5n^{1/3}}$

Sugestão: Sabe-se do Cálculo I que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (denominado limite fundamental exponencial)

Questão 2: (2.5 pontos)
Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x+2)^n}{n\, 3^n}$. Faça o que se pede:

(a) (1.0 ponto) Determine o raio e o intervalo de convergência da série de potências acima;

(b) (0.8 ponto) Determine uma expressão em série de potências em torno do ponto $x_0 = -2$ para $f'(x)$;

(c) (0.7 ponto) Obtenha o intervalo de convergência da série de potências obtida no item (b).

Questão 3: (3.0 pontos)
Considere a equação diferencial dada abaixo:

$$2x^2y''(x) + (x - x^2)y'(x) - y(x) = 0, \qquad x \in (0, \infty)\,.$$

(a) (0.6 ponto) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação diferencial;

(b) (0.4 ponto) Determine as raízes da equação indicial;

(c) (1.0 ponto) Determine a relação de recorrência;

(d) (1.0 ponto) Obtenha a solução $y_1(x)$ correspondente à maior raiz da equação indicial.

Questão 4: (2.5 pontos)
Seja a seguinte EDO: $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = f(t)$, com $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le t < 2\pi \\ 2 & \text{se} \quad t \ge 2\pi \end{cases}\,.$$

Encontre a solução do problema de valor inicial usando Transformada de Laplace e SEM usar convolução.

Regras:

- Duração da prova: 150 minutos
- Não é permitido (nem necessário) o uso de calculadoras, consulta a qualquer fonte e nem se ausentar da sala por qualquer motivo.
- Mantenham os celulares e similares desligados e dentro das bolsas/mochilas. As bolsas e mochilas deverão ser guardadas na mesa do professor ou junto ao quadro em local afastado do aluno.

TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE NO VERSO

Tabela Básica de Transformadas de Laplace

- $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$, $s > 0$
- $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \dfrac{1}{s-a}$, $s > a$
- $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$, com n sendo um inteiro
- $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
- $\mathcal{L}\{\cos at)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$
- $\mathcal{L}\left\{e^{at}\operatorname{sen} bt)\right\} = \dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
- $\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos\, bt\right\} = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
- $\mathcal{L}\left\{e^{at}t^n\right\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$, com n sendo um inteiro
- $\mathcal{L}\{u_c(t).g(t-c)\} = e^{-cs}G(s)$, sendo $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, $s > c$
- $\mathcal{L}\left\{e^{ct}g(t)\right\} = G(s-c)$, sendo $G(s-c) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s-c)$, $s > c$