Questão 1: (2.5 pontos)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica, de período 2, tal que f e f' são seccionalmente contínuas. Além disso, $f(x) = 1 - 2x$ para todo $0 < x < 1$ e sua série de Fourier é dada pela expressão $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) [0.5 ponto] Determine a expressão de $f(x)$ para todo $-1 < x < 0$.

b) [1 ponto] Calcule os coeficientes b_n.

c) [0.5 ponto] Calcule $F(1/4)$ e $F(3)$.

d) [0.5 ponto] Use a série de Fourier de f para calcular o valor da série $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}$.

Solução:

a) De acordo com a expressão de F, a função f deve ser ímpar. Assim, para todo $-1 < x < 0$ a expressão de f é dada por $f(x) = -f(-x) = -(1 - 2(-x)) = -(1 + 2x)$.

b) Neste caso podemos calcular os coeficientes de Fourier como segue:

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\int_0^1 (1-2x)\operatorname{sen}(n\pi x)dx \\
&= 2\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)dx - 4\int_0^1 x\operatorname{sen}(n\pi x)dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1) - 4\left(-\frac{x\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\underbrace{\int_0^1 \cos(n\pi x)dx}_{=0}\right) \\
&= \frac{2 - 2(-1)^n}{n\pi} + \frac{4(-1)^n}{n\pi} = \frac{2(1 + (-1)^n)}{n\pi} = \begin{cases} \frac{2}{\kappa\pi} & \text{se } n = 2\kappa, \\ 0 & \text{se } n = 2\kappa - 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

onde $\kappa = 1, 2, 3\dots$

c) A função f é contínua em $x = 1/4$, logo $F(1/4) = f(1/4) = 1/2$. Por outro lado,

$$F(3) = F(1) = \frac{f(1^-) + f(1^+)}{2} = \frac{f(1^-) + f((-1)^+)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0.$$

d) Tomando $x = 1/4$ e usando o cálculo realizado para os coeficientes b_n temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} = F(1/4) &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} b_{2\kappa}\operatorname{sen}(2\kappa\pi\tfrac{1}{4}) \\
&= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \tfrac{2}{\kappa\pi}\operatorname{sen}(\tfrac{\kappa\pi}{2}) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \tfrac{2}{(2m-1)\pi}(-1)^{m+1} = \tfrac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{m+1}}{2m-1}.
\end{aligned}$$

Das igualdades anteriores concluímos que $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1} = \frac{\pi}{4}$.

Questão 2: (2 pontos)

Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = 4u_{tt}(x,t), & 0 < x < 1 \text{ e } t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u_x(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases} \tag{1}$$

Deseja-se encontrar soluções não triviais do problema anterior na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Determine as equações diferenciais ordinárias que deverão satisfazer as funções $X(x)$ e $T(t)$, com suas respectivas condições de contorno e iniciais.

Observação: Não precisa resolver os problemas encontrados.

Solução:

Usando a primeira equação de (1) obtemos a igualdade $X''(x)T(t) = 4X(x)T''(t)$ para todo $t > 0$ e $0 < x < 1$. Procuram-se soluções não triviais, logo da igualdade anterior segue a relação:

$$4\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \; 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

As variáveis x e t são independentes, logo devemos encontrar constantes de separação $\lambda \in \mathbb{R}$ que verifiquem as igualdades

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad \text{e} \quad \frac{T''(t)}{T(t)} = -\frac{\lambda}{4}. \tag{2}$$

Das condições de contorno do problema temos que $X(0)T(t) = 0 = X'(1)T(t)$ para todo $t > 0$. Portanto,

$$X(0) = X'(1) = 0. \tag{3}$$

Por outro lado, de acordo com as condições iniciais do problema obtemos $X(x)T'(0) = 0$ para todo $0 < x < 1$, de onde seque que

$$T'(0) = 0. \tag{4}$$

Combinando (2), (3) e (4) obtemos os seguintes problemas para X e T:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ X(0) = X'(1) = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} T''(x) + \frac{\lambda}{4}T(t) = 0, & t > 0, \\ T'(0) = 0. \end{cases}$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Em uma barra de comprimento π, encontre a solução $u = u(x,t)$ do problema de condução do calor, com uma fonte externa de energia na forma de calor proporcional à temperatura u, que é modelado pelo sistema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u(x,t) + u_{xx}(x,t), & 0 < x < \pi \text{ e } t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0, \\ u_x(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 2\cos(2x) - \cos(5x), & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Solução:

Inicialmente, procuremos soluções de $\begin{cases} u_t = u + u_{xx}, \\ u_x(0,t) = 0, \qquad t > 0; \\ u_x(\pi,t) = 0, \qquad t > 0; \end{cases}$ sob a forma de um produto (separação de variáveis) $u(x,t) = X(x)T(t)$, em que $X(x)$ é de classe C^2 e $T(t)$ é de classe C^1. Substituindo $u_t(x,t) = X(x)T'(t)$ e $u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$ na equação a derivadas parciais, obtemos

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - 1 \quad = \quad \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Portanto, existirá uma constante λ (constante de separação) tal que

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - 1 = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Assim, a equação diferencial para T é $T'(t) + (\lambda - 1)\,T(t) = 0$, que tem como solução $T(t) = T_0 e^{(1-\lambda)t}$, onde T_0 é uma constante real. Por outro lado, a equação diferencial para X é

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{5}$$

cuja a solução geral depende do sinal do discrimante $\Delta = -4\lambda$ da equação característica associada a (5). A partir de agora $X(x) = X_\lambda(x)$ denota a solução de (5) para cada constante de separação λ.

Caso 1. $\Delta > 0 \quad (\lambda < 0)$. A solução geral, neste caso, tem a forma $X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$.

Caso 2. $\Delta = 0 \quad (\lambda = 0)$. A solução geral tem a forma $X(x) = A + Bx$.

Caso 3. $\Delta < 0 \quad (\lambda > 0)$. A solução geral tem a forma $X(x) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right)$.

Para optarmos por um ou mais dos casos acima necessitamos das condições de contorno. De $u_x(0,t) = 0$, usando que $T(t) \neq 0$ para $t > 0$, obtemos $X'(0) = 0$, enquanto que de $u_x(\pi,t) = 0$, obtemos $X'(\pi) = 0$.

Afirmação 1. Sob as hipóteses $\Delta > 0$ e $X'(0) = X'(\pi) = 0$, temos $X \equiv 0$.

De fato, usando que $X(x) = \left(Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}\right)$ e $X'(x) = \sqrt{-\lambda}\left(Ae^{\sqrt{-\lambda}x} - Be^{-\sqrt{-\lambda}x}\right)$, obtém-se

$$\begin{cases} A - B = 0, \\ Ae^{\sqrt{-\lambda}\pi} - Be^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0, \end{cases}$$

que tem como única solução $A = B = 0$.

Afirmação 2. Sob as hipóteses $\Delta = 0$ e $X'(0) = X'(\pi) = 0$, temos $X \equiv A = Cte$.

De fato, como $X(x) = A + Bx$ e $X'(x) = B$, obtemos que $X'(0) = B = 0$. A correspondente solução para T é, neste caso, $T_0(t) = e^t$.

Afirmação 3. Sob as hipóteses $\Delta < 0$, $X'(0) = X'(\pi) = 0$, e X não trivial, temos $X(x) = A\cos(nx)$, sendo A uma constante real qualquer.

De fato, neste caso, temos que $X(x) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right)$ e

$$X'(x) = \sqrt{\lambda}\left(B\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) - A\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right).$$

Segue das condições de contorno que $B = 0$ e $A\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$. Logo, usando que X é não trivial, obtemos $\sqrt{\lambda} = n$ e, portanto, $\lambda = n^2$ e $X_n(x) := X_\lambda(x) = A_n\cos(nx)$, em que A_n é uma constante real e $n = 1, 2, \ldots$. Voltando à função $u(x,t)$ temos

$$u(x,t) = u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-\left(n^2-1\right)t}\cos(nx).$$

Definamos agora

$$u(x,t) = A_0 e^t + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} X_n(x) T_n(t) = A_0 e^t + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-(n^2-1)t} \cos(nx)$$

e consequentemente

$$u(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(nx).$$

Comparando com $2\cos(2x) - \cos(5x)$, temos $A_2 = 2$, $A_5 = -1$ e todos os demais A_n são nulos. Logo, a solução procurada pode ser escrita sob a forma

$$u(x,t) = 2e^{-3t} \cos(2x) - e^{-24t} \cos(5x).$$

Questão 4: (3 pontos)

Considere o problema de Dirichlet no exterior do disco centrado na origem e de raio 2, descrito em coordenadas polares da forma seguinte:

$$\begin{cases} u_{rr}(r,\theta) + \dfrac{1}{r} u_r(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2} u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0, \quad r > 2,\ 0 < \theta < 2\pi, & (d_1) \\ u(2,\theta) = f(\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi, & (d_2), \end{cases}$$

onde f é uma função periódica de período 2π que tem derivada contínua na reta, isto é, $f \in C^1(\mathbb{R})$.

a) [1 ponto] Deseja-se encontrar soluções não triviais da equação (d_1) na forma $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Determine as equações diferenciais ordinárias que deverão satisfazer as funções $R(r)$ e $\Theta(\theta)$.

b) [1 ponto] Use o item a) para encontrar todas as soluções não triviais da equação (d_1) na forma $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ que são limitadas no infinito.

c) [1 ponto] Use o item b) para encontrar a solução $u(r,\theta)$ do problema (d_1)-(d_2) que é limitada no infinito.

Solução:

a) Seja u uma solução de (d_1) na forma $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$. A condição de periodicidade para u nas coordenadas polares (r,θ) se traduz na condição seguinte:

$$u(r,\theta+2\pi) = u(r,\theta) \quad \Longrightarrow \quad \Theta(\theta+2\pi) = \Theta(\theta), \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Além disso, sendo $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ uma solução de (d_1), temos que

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r} R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r)\Theta''(\theta) = 0 \iff r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}$$

para todos $r > 2$ e $0 < \theta < 2\pi$. Portanto, deduzimos que existe uma constante de separação $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0, \quad r > 2, & (7a) \\ \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, \quad 0 < \theta < 2\pi. & (7b) \end{cases}$$

b) Pelo item (a), R e Θ devem satisfazer as equações (6), (7a) e (7b).

Para resolver o problema de contorno (7b)–(6), estudamos separadamente os casos $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$.

Caso $\boldsymbol{\lambda < 0}$: Neste caso, escrevemos $\lambda = -\mu^2$ para algum $\mu > 0$. As soluções de (7b) são da forma $\Theta(\theta) = c_1 e^{\mu\theta} + c_2 e^{-\mu\theta}$ para c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. Mas a condição (6) implica $c_1 = c_2 = 0$. Portanto não há soluções não triviais neste caso.

Caso $\boldsymbol{\lambda = 0}$: Neste caso, é fácil ver que $\Theta(\theta) = c_1\theta + c_2$ para c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. A condição (6) implica $c_1 = 0$. Portanto, $\Theta(\theta) = c_2$ para algum $c_2 \in \mathbb{R}$. Por outro lado, a equação (7a) é uma equação de Euler cuja solução é da forma $R(r) = k_1 \ln(r) + k_2$, para k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$. Assim, para u ser uma solução limitada, precisamos que $k_1 = 0$. Logo as soluções devem ser constantes, ou seja,

$$u_0(r,\theta) = a_0, \quad a_0 \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Caso $\boldsymbol{\lambda > 0}$: Neste caso, escrevemos $\lambda = \mu^2$ para algum $\mu > 0$. As soluções de (7b) são da forma $\Theta(\theta) = c_1 \cos(\mu\theta) + c_2 \operatorname{sen}(\mu\theta)$ para c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. A condição (6) implica que $\mu \in \mathbb{N}^\star := \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}^\star$, resolvemos a equação de Euler (7a) associada a $\lambda_n = n^2$, cuja equação característica é dada por $\gamma(\gamma - 1) + \gamma - n^2 = 0$, tendo como soluções $\gamma = \pm n$. Portanto, as soluções de (7a) são $R(r) = k_1 r^n + k_2 r^{-n}$, com k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$. Para a função R ser limitada no intervalo $r > 2$ precisamos escolher $k_1 = 0$, obtendo-se assim uma infinidade de soluções não triviais linearmente independentes de (d_1), dadas por

$$u_n(r,\theta) = a_n r^{-n} \cos(n\theta) + b_n r^{-n} \operatorname{sen}(n\theta), \; a_n, \; b_n \in \mathbb{R}, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}^\star. \tag{9}$$

c) Usando o item anterior, procuramos a solução u de (d_1)-(d_2) que é limitada no infinto como uma combinação linear infinita das funções u_n, isto é,

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n r^{-n} \cos(n\theta) + b_n r^{-n} \operatorname{sen}(n\theta) \Big), \tag{10}$$

onde a_n é uma constante real para cada $n \in \mathbb{N}$ e b_n é uma constante real para cada $n \in \mathbb{N}^\star$.

Falta verificar a condição (d_2), a qual nos exige garantir a igualdade

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n 2^{-n} \cos(n\theta) + b_n 2^{-n} \operatorname{sen}(n\theta) \Big),$$

de onde concluímos que os coeficientes a_n e b_n estão relacionados com os coeficientes de Fourier da função períodica f (de período 2π) da seguinte maneira:

$$a_n = \frac{2^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad \text{e} \quad b_n = \frac{2^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen}(n\theta) d\theta, \tag{11}$$

com $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Conclusão: A solução $u(r,\theta)$ do problema (d_1)-(d_2) que é limitada no infinto é dada por (10)–(11).

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.