Questão 1: (2.5 pontos)

(**a**) [1.5 ponto] Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de período 2 definida por $f(x) = 1 - x^2$, para $x \in [-1, 1]$. Determinar a série de Fourier da função f.

(**b**) [1 ponto] Usando o item (a), calcular a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Justifique sua resposta.

Solução:

(**a**) Como f é par, sabemos que a série de Fourier de f é dada por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\pi x) \quad \text{onde} \quad a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)dx\,, \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Primeiramente, calculamos a_0:

$$a_0 = 2\int_0^1 (1 - x^2)dx = (2x - \frac{2}{3}x^3)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}\,.$$

Fixamos $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Para calcular a_n, integramos por parte duas vezes:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi}x^2\operatorname{sen}(n\pi x)\Big|_0^1 + \frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\operatorname{sen}(n\pi x)dx \\ &= \frac{4}{n^2\pi^2}(-x\cos(n\pi x))\Big|_0^1 + \frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1 \cos(n\pi x)dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\,. \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier de f é dada por $\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(n\pi x)$.

(**b**) Observamos que a função f é contínua sobre $\mathbb{R}$ e a sua derivada f' é seccionalmente contínua sobre $\mathbb{R}$. Portanto pelo teorema de convergência de Dirichlet sobre série de Fourier, vale que

$$f(x) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(n\pi x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Em particular, deduzimos fazendo $x = 0$ que

$$1 = f(0) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}\,.$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Determinar para quais valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ o seguinte problema de valor de contorno admite soluções não triviais (não identicamente nulas):

$$\begin{cases} y''(x) - 2y(x) = \lambda y(x),\ 0 < x < 3\,, \\ y'(0) = y(3) = 0\,. \end{cases}$$

Solução:

Consideramos a equação característica da EDO acima: $r^2 - (2+\lambda) = 0$, cujo discriminante é $\delta = 4(2+\lambda)$. Portanto, vamos analisar separadamente os 3 casos: $\lambda = -2, \lambda < -2$ e $\lambda > -2$.

1. *Caso* $\lambda = -2$*:* Nesse caso, a equação diferencial se torna $y''(x) = 0$. A solução geral dessa equação é $y(x) = ax + b$, onde a e b são constantes reais. Aplicando as condições de contorno, temos que
$$\begin{cases} y'(x) = a, y'(0) = 0 \Rightarrow a = 0\,, \\ y(3) = 0 \cdot 3 + b = 0 \Rightarrow b = 0\,. \end{cases}$$
Ou seja, as condições de contorno impõem $a = b = 0$, isto é, y tem que ser a solução nula, portanto $\lambda = -2$ não é um valor desejado.

2. *Caso* $\lambda > -2$*:* Nesse caso, temos $2 + \lambda > 0$ e as raízes da equação característica são $r = \pm\sqrt{2+\lambda}$. Portanto, a solução geral dessa equação diferencial é
$$y(x) = c_1 \exp(\sqrt{2+\lambda}\,x) + c_2 \exp(-\sqrt{2+\lambda}\,x)\,,$$
onde c_1 e c_2 são constantes reais. Aplicando as condições de contorno, temos que
$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1\sqrt{2+\lambda} - c_2\sqrt{2+\lambda} = 0 \\ c_1 e^{3\sqrt{2+\lambda}} + c_2 e^{-3\sqrt{2+\lambda}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 \\ 2c_1 \mathrm{senh}\,(3\sqrt{2+\lambda}) = 0 \end{cases},$$
o que implica $c_1 = c_2 = 0$. Em conclusão, valores de λ estritamente maiores do que -2 não são os valores procurados.

3. *Caso* $\lambda < -2$*:* Nesse caso, temos $2 + \lambda < 0$ e as raízes da equação característica são $r = \pm i\sqrt{-(2+\lambda)}$. Portanto a solução geral dessa equação diferencial é
$$y(x) = d_1 \mathrm{sen}\,(\sqrt{-(2+\lambda)}\,x) + d_2 \cos(\sqrt{-(2+\lambda)}\,x)\,,$$
onde d_1 e d_2 são constantes reais. Aplicando a primieira condição de contorno, temos que
$$y'(0) = d_1\sqrt{-(2+\lambda)} = 0 \quad \Rightarrow \quad d_1 = 0\,.$$
Aplicando a segunda condição de contorno, temos que
$$y(3) = d_2 \cos(3\sqrt{-(2+\lambda)}) = 0 \quad \Rightarrow \quad d_2 = 0 \text{ ou } \cos(3\sqrt{-(2+\lambda)}) = 0\,.$$
O caso $d_2 = 0$ é excluído já que ele corresponde à solução trivial $y \equiv 0$. Por outro lado, $\cos(3\sqrt{-(2+\lambda)}) = 0$ implica que $3\sqrt{-(2+\lambda)} = \frac{2n-1}{2}\pi$ para $n = 1, 2, 3, \cdots$. Em conclusão, caso λ assuma qualquer um dos valores dados por
$$\lambda_n = -2 - \left(\frac{2n-1}{6}\right)^2 \pi^2 \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \cdots\,,$$
existirá uma solução y não trivial.

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere o problema de valor inicial e de contorno, definido por

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 2u_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < \frac{1}{2}, \quad t > 0, \\ u(0,t) = \frac{1}{2}, & t \geq 0, \\ u(\frac{1}{2},t) = \frac{3}{4}, & t \geq 0, \\ u(x,0) = x^2 + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

que representa a distribuição de temperatura numa barra de seção uniforme, de material homogêneo e de comprimento $\frac{1}{2}$.

(**a**) [1 ponto] Determinar a distribuição de temperatura da barra, denotada por $v(x)$ para todo $x \in [0, \frac{1}{2}]$, após alcançado o estado de equilíbrio térmico (estado estacionário).

(**b**) [1.5 ponto] Definindo $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$, determinar o problema de valor inicial e de fronteira que a função $w(x,t)$ deverá satisfazer. Não é necessário resolver o problema obtido, porém deve se justificar todos os argumentos que conduzem a ele.

Solução:

(**a**) A solução estacionária não depende do tempo e é modelada pelo problema de valores de contorno:

$$\begin{cases} v_{xx}(x) = 0, \quad 0 < x < 1/2 \\ v(0) = 1/2 \quad \text{e} \quad v(1/2) = 3/4. \end{cases}$$

A solução geral da equação $v_{xx}(x) = 0$ é dada pela expressão $v(x) = ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Usando as condições de contorno obtemos as seguintes relações $v(0) = b = 1/2$ e $v(1/2) = a/2 + 1/2 = 3/4$, logo $a = 1/2$. Assim, a solução estacionária é dada por $v(x) = x/2 + 1/2$.

(**b**) Primeiramente observamos que w satisfaz condições de contorno homogêneas, isto é,

$$w(0,t) = u(0,t) - v(0) = 1/2 - 1/2 = 0, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

$$w(1/2,t) = u(1/2,t) - v(1/2) = 3/4 - 3/4 = 0, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Além disso, w satisfaz a condição inicial:

$$w(x,0) = x^2 + 1/2 - (x/2 + 1/2) = \frac{x(2x-1)}{2}. \tag{3}$$

Por outro lado, valem as seguintes relações para as derivadas parciais de w:

$$w_t(x,t) = u_t(x,t), \tag{4}$$

$$w_{xx}(x,t) = u_{xx}(x,t) - v_{xx}(x) = u_{xx}(x,t). \tag{5}$$

Portanto, segue de (4) e (5) que

$$w_t(x,t) - 2w_{xx}(x,t) = u_t(x,t) - 2u_{xx}(x,t) = 0. \tag{6}$$

Finalmente, de (1), (2), (3) e (6) obtemos que w verifica o seguinte problema:

$$\begin{cases} w_t(x,t) - 2w_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < 1/2, \quad t > 0, \\ w(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ w(1/2,t) = 0, & t \geq 0, \\ w(x,0) = x(2x-1)/2, & 0 \leq x \leq 1/2. \end{cases}$$

Questão 4: (2.5 pontos)
Considere a equação de ondas em um meio dispersivo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad \forall\, 0 < x < 1,\ \forall\, t > 0\,.$$

(**a**) [1.5 ponto] Achar todas as soluções não triviais que possam ser escritas na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ e que satisfaçam $u(0,t) = u(1,t) = 0$.

(**b**) [1 ponto] Adicionando às condições de contorno do item (**a**) as condições iniciais $u(x,0) = f(x)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, sendo $f(x)$ uma função contínua em $0 \leqslant x \leqslant 1$ e satisfazendo $f(0) = f(1) = 0$, determinar a solução $u(x,t)$.

Solução:

(**a**) Consideramos que a solução u pode ser escrita na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ e façamos a substituição em $u_{tt} + 4u = u_{xx}$. Obtemos assim

$$X''(x)T(t) = X(x)T''(t) + 4X(x)T(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} + 4 = -\lambda\,,$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$ é a constante de separação. Das condições de contorno, $u(0,t) = u(1,t) = 0$, temos $X(0) = X(1) = 0$. Resta-nos achar as soluções não triviais do seguinte problema:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0\,, \\ X(0) = X(1) = 0\,. \end{cases}$$

A solução deste problema é dada pela família de constantes $\lambda_n = n^2\pi^2$ e respectivas funções $X_n(x) = c_n \mathrm{sen}\,(n\pi x)$, sendo c_n constantes e $n = 1.2, \ldots$.. Quanto à função $T(t)$, ela deve satisfazer

$$T'' + (4 + \lambda_n)\,T = 0\,,$$

isto é, $T(t) = d_n \cos\left(\sqrt{4+\lambda_n}\,t\right) + e_n \mathrm{sen}\left(\sqrt{4+\lambda_n}\,t\right)$, sendo d_n e e_n constantes e $n = 1.2, \cdots$.
Portanto, obtemos uma família enumerável de soluções da forma:

$$u_n(x,t) = \left(a_n \cos\left(\sqrt{4+n^2\pi^2}\,t\right) + b_n \mathrm{sen}\left(\sqrt{4+n^2\pi^2}\,t\right)\right) \mathrm{sen}\,(n\pi x)\,,\ a_n,\ b_n \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \cdots.$$

(**b**) Em geral, nenhuma das u_n e nem suas conbinações lineares finitas satisfarão $u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = 0$. A esperança de solução está em uma série do tipo $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t)$, ou seja

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\sqrt{4+n^2\pi^2}\,t\right) + b_n \mathrm{sen}\left(\sqrt{4+n^2\pi^2}\,t\right)\right) \mathrm{sen}\,(n\pi x)\ .$$

Das condições de contorno, $u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = 0$, obtemos

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{sen}\,(n\pi x)\,dx \qquad \text{e} \qquad b_n = 0\,.$$

Assim sendo, a solução formal é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\sqrt{4+n^2\pi^2}\,t\right) \mathrm{sen}\,(\pi n x)\,, \qquad \text{onde} \qquad a_n = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{sen}\,(n\pi x)\,dx\,.$$