Questão 1: (2.5 pontos)

Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3}(x-2)^n$.

a) [2.0 pontos] Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x)$ é convergente.

b) [0.5 ponto] Determine $f^{(17)}(2)$, onde $f^{(17)}(x)$ é a décima sétima derivada de $f(x)$.

Solução:

a) Usaremos o Teste da Razão para determinar o raio de convergência ρ da série, logo devemos calcular, caso exista, o $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|$, onde $a_n(x) = \frac{(n+1)^2}{n^3}(x-2)^n$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+2)^2(x-2)^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{(n+1)^2(x-2)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^3}{(n+1)^3}(x-2)\right| \\
&= |x-2| \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1}\right)^2 \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\right)^3 \\
&= |x-2|.
\end{aligned}$$

Pelo Teste da Razão, se $|x-2| < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$ a série $f(x)$ converge absolutamente.

Agora estudamos os extremos do intervalo. No caso em $x = 1$ a série correspondente $f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^2}{n^3}$ é convergente de acordo com o Critério de Leibniz para séries alternadas. De fato, a sequência

$$b_n := \frac{(n+1)^2}{n^3} = \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

satisfaz as seguintes condições:

- $b_n > 0, \quad$ para todo $n \geq 1$,
- $\lim_{n\to\infty} b_n = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2 = 0 \cdot 1 = 0$,
- b_n é decrescente ($b_{n+1} < b_n,\ n \geq 1$), pois as sequências $c_n := \frac{1}{n}$ e $d_n := 1 + \frac{1}{n}$ são decrescentes e o produto de sequências positivas e decrescentes resulta em uma sequência decrescente.

Finalmente, no caso em que $x = 3$, temos que $f(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3}$, cujo termo $a_n = \frac{(n+1)^2}{n^3}$ satisfaz a desigualdade $\frac{(n+1)^2}{n^3} > \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$. Portanto, de acordo com o teste de comparação, a divergência da série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ implica a divergência de $f(3)$. Resumindo, $f(x)$ converge no intervalo $1 \leq x < 3$.

b) Sabemos que os coeficientes de uma série de potências $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$, definida no intervalo $|x-x_0| < \rho$, $\rho > 0$, podem ser obtidos através das igualdades $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n \geq 0$. Portanto, $a_{17} = \frac{18^2}{17^3} = \frac{f^{(17)}(2)}{17!}$, de onde concluímos que $f^{(17)}(2) = \left(\frac{18}{17}\right)^2 16!$.

Questão 2: (2.5 pontos)

Considere o seguinte problema de valores iniciais:

$$\text{(I)} \begin{cases} y''(x) - xy'(x) = \operatorname{sen} x, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

Deseja-se procurar a solução de (I) em forma de série de potências centrada na origem $x = 0$, isto é, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

a) [2.0 pontos] Use que o desenvolvimento em série de Taylor da função $\operatorname{sen} x$ é dado por

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{(2\kappa+1)!} x^{2\kappa+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

para determinar a relação de recorrência entre os coeficientes da série de potências $y(x)$.

b) [0.5 ponto] Determine os valores de a_n com $1 \leq n \leq 6$.

Solução:

a) Procuramos por uma solução da forma $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, com $a_n \in \mathbb{R}$ e $|x| < \rho$ para algum $\rho > 0$. Assim, $y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ e $y''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n\geq 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$. Substituindo as expressões de y' e y'' na equação diferencial $y''(x) - xy'(x) = \operatorname{sen} x$ obtemos a igualdade

$$\sum_{n\geq 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n\geq 1} n a_n x^n = \sum_{\kappa\geq 0} \frac{(-1)^\kappa x^{2\kappa+1}}{(2\kappa+1)!},$$

a qual pode ser reescrita como segue

$$2a_2 + \sum_{n\geq 1} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - n a_n\right] x^n = \sum_{\kappa\geq 0} \frac{(-1)^\kappa x^{2\kappa+1}}{(2\kappa+1)!}.$$

A série do membro direito da igualdade só contém potências ímpares de x, logo concluímos que $2a_2 = 0$, ou seja, $a_2 = 0$. Além disso, a relação de recorrência é dividida em duas partes:

<u>**Caso 1:**</u> $n = 2\kappa \quad (\kappa = 1, 2, \dots)$

$$(2\kappa+2)(2\kappa+1) a_{2\kappa+2} - 2\kappa a_{2\kappa} = 0 \Longrightarrow a_{2\kappa+2} = \frac{2\kappa a_{2\kappa}}{(2\kappa+2)(2\kappa+1)}.$$

<u>**Caso 2:**</u> $n = 2\kappa + 1 \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots)$

$$(2\kappa+3)(2\kappa+2) a_{2\kappa+3} - (2\kappa+1) a_{2\kappa+1} = \frac{(-1)^\kappa}{(2\kappa+1)!} \Longrightarrow a_{2\kappa+3} = \frac{(2\kappa+1) a_{2\kappa+1}}{(2\kappa+3)(2\kappa+2)} + \frac{(-1)^\kappa}{(2\kappa+3)!}.$$

b) As condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$ nos dão que $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$. Além disso, como $a_2 = 0$, de acordo com recorrência obtida no caso 1 do item a) temos que $a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = a_{2\kappa} = \cdots = 0$. Por outro lado, de acordo com a recorrência obtida no caso ímpar do item a), os primeiros termos ímpares são os seguintes:

$$\boldsymbol{\kappa = 0:}\ a_3 = \frac{a_1}{3\cdot 2} + \frac{1}{3!} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\boldsymbol{\kappa = 1:}\ a_5 = \frac{3a_3}{5\cdot 4} - \frac{1}{5!} = \frac{3}{40} - \frac{1}{120} = \frac{1}{15}.$$

Resumindo, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = 0$, $a_5 = \frac{1}{15}$ e $a_6 = 0$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere a seguinte família de equações de Euler:

$$16x^2y''(x) + 8xy'(x) + y(x) = \kappa, \quad x > 0, \tag{1}$$

onde κ é uma constante real.

a) [2.0 pontos] Encontre a solução da equação homogênea ($\kappa = 0$) correspondente a (1) que satisfaz as seguintes condições:

$$y(1) = 1 \quad \text{e} \quad y(e) = 0, \tag{2}$$

onde $e = 2,718.....$ é a base do logaritmo neperiano.

b) [0.5 ponto] Seja $y(x)$ uma solução qualquer de (1) com $\kappa = 1$. Calcule o valor de $\lim_{x\to 0^+} y(x)$.
Sugestão: *Encontre uma equação de Euler que seja satisfeita pela função* $w(x) = y(x) - 1$.

Solução:

a) Procuramos por soluções de (1) na forma $y(x) = x^r$, de modo que $y'(x) = rx^{r-1}$ e $y''(x) = r(r-1)x^{r-2}$. Substituindo as expressões de y, y' e y'' em (1) com $\kappa = 0$ obtemos a equação

$$x^r\Big(16r(r-1) + 8r + 1\Big) = x^r\Big(16r^2 - 8r + 1\Big) = 0.$$

Portanto, deve ser satisfeita a equação característica $16r^2 - 8r + 1 = (4r-1)^2 = 0$, cuja raiz é $r = \frac{1}{4}$ e tem multiplicidade dois. De acordo com a solução obtida para a equação característica, a solução geral de (1) é dada pela expressão:

$$y(x) = x^{\frac{1}{4}}\Big(c_1 + c_2 \ln x\Big), \quad x > 0, \tag{3}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Usando as condições dadas em (2) obtemos o sistema linear

$$y(1) = c_1 + c_2 \ln 1 = 1, \tag{4}$$

$$y(e) = e^{\frac{1}{4}}(c_1 + c_2) = 0. \tag{5}$$

As soluções do sistema são $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$, logo a solução da equação (1), sujeita às condições dadas em (2), é $y(x) = x^{\frac{1}{4}}\Big(1 - \ln x\Big), \quad x > 0.$

b) Notamos que com $\kappa = 1$ a equação a ser resolvida é $16x^2y''(x) + 8xy'(x) + y(x) - 1 = 0,\ x > 0$, que reescrita em termos de $w(x) = y(x) - 1$ toma a forma

$$16x^2w''(x) + 8xw'(x) + w(x) = 0,\ x > 0,$$

pois $y' = w'$ e $y'' = w''$. De acordo com o item a) $w(x) = x^{\frac{1}{4}}\Big(c_1 + c_2 \ln x\Big), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Logo,

$$y(x) = 1 + c_1x^{\frac{1}{4}} + c_2x^{\frac{1}{4}} \ln x.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = 1 + c_1 \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{4}} + c_2 \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{4}} \ln x = 1 + 0 + c_2 \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{4}} \ln x,$$

onde o último limite é calculado fazendo-se uso da regra de l'Hôpital: $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{4}} \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}} = -4 \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{4}} = 0$. Portanto, $\lim_{x\to 0^+} y(x) = 1$ para toda solução de (1) com $\kappa = 1$.

Questão 4: (2.5 pontos)

Seja $\mathcal{L}$ a Transformada de Laplace e $\mathcal{L}^{-1}$ a transformada inversa.

a) [1.0 ponto] Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-5s}}{s(s^2+s+1)}\right\}$.

b) [1.5 pontos] Resolva o seguinte problema de valores iniciais:

$$\text{(II)} \begin{cases} y''(t) + y'(t) + y(t) = \delta(t-3) + u_5(t), \\ y'(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

Solução:

a) O polinômio $s^2 + s + 1 = (s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ não tem raízes reais, logo pelo método das frações parciais temos que existem constantes reais a, b e c tais que

$$\frac{1}{s(s^2+s+1)} = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+s+1} = \frac{(a+b)s^2 + (a+c)s + a}{s(s^2+s+1)},$$

de onde segue que $a = 1$, $c = -1$ e $b = -1$. Assim, de acordo com a tabela básica de transformadas de Laplace obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s(s^2+s+1)} &= \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} - \frac{\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\
&= \mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}\left[\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t)\right](s+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}\left[\operatorname{sen}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t)\right](s+\tfrac{1}{2}) \\
&= \mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}\left[e^{-\frac{t}{2}}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t)\right](s) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}\left[e^{-\frac{t}{2}}\operatorname{sen}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t)\right](s) \\
&= \mathcal{L}\left[1 - e^{-\frac{t}{2}}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\operatorname{sen}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t)\right](s).
\end{aligned}$$

Finalmente, pela propriedade b) do resumo em anexo seque que

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-5s}}{s(s^2+s+1)} &= e^{-5s}\mathcal{L}\left[1 - e^{-\frac{t}{2}}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\operatorname{sen}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t)\right](s) \\
&= \mathcal{L}\left[u_5(t)\left\{1 - e^{-\frac{1}{2}(t-5)}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}(t-5)) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}(t-5)}\operatorname{sen}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}(t-5))\right\}\right](s),
\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{s(s^2+s+1)}\right\} = u_5(t)\Big(1 - e^{-\frac{1}{2}(t-5)}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}(t-5)) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}(t-5)}\operatorname{sen}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}(t-5))\Big).$$

b) Aplicando a transformada de Laplace à equação diferencial, com apoio das propriedades d), c) e b) do resumo em anexo, e usando as condições iniciais homogêneas $y'(0) = y(0) = 0$, obtemos para $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$ a equação algébrica seguinte:

$$s^2Y(s) + sY(s) + Y(s) = e^{-3s} + \frac{e^{-5s}}{s},$$

de onde concluímos que $Y(s) = \dfrac{e^{-3s}}{s^2+s+1} + \dfrac{e^{-5s}}{s(s^2+s+1)}$. Assim,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2+s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{s(s^2+s+1)}\right\}.$$

O cálculo do segundo termo já foi obtido no item a); apenas precisamos calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2+s+1}\right\}$, que segue da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2+s+1}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right\} \\
&= \tfrac{2}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right\} \\
&= \tfrac{2}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-3s}\mathcal{L}\left[e^{-\frac{t}{2}}\operatorname{sen}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t)\right](s)\right\} \\
&= \tfrac{2}{\sqrt{3}}u_3(t)e^{-\frac{1}{2}(t-3)}\operatorname{sen}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}(t-3)).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
y(t) = &\tfrac{2}{\sqrt{3}}u_3(t)e^{-\frac{1}{2}(t-3)}\operatorname{sen}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}(t-3)) + \\
&+ u_5(t)\Big(1 - e^{-\frac{1}{2}(t-5)}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}(t-5)) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}(t-5)}\operatorname{sen}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}(t-5))\Big).
\end{aligned}$$

1. Tabela básica de transformadas de Laplace

$f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$	$\mathcal{L}[f](s)$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$

2. Propriedades básicas da Transformada de Laplace

a) $\mathcal{L}[e^{ct} f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-c)$.

b) $\mathcal{L}[u_c(t) f(t-c)](s) = e^{-cs} \mathcal{L}[f(t)](s)$.

c) $\mathcal{L}[\delta(t-c)](s) = e^{-cs}$.

d) $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n \mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$.