Questão 1: (3 pontos)

(**a**) [1 ponto] Dizer se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge ou diverge. No caso da série convergir, calcular o valor da soma.

(**b**) [1 ponto] Dizer se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{\pi^n}$ converge ou diverge. No caso da série convergir, calcular o valor da soma.

(**c**) [1 ponto] Considere a sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \pi$. Determinar o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$.

Solução:

(**a**) Observamos que $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall\, n \geq 1$. Além disso $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge já que é uma $p-$série de Riemann com $p = 2 > 1$. Portanto, deduzimos do teste de comparação que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

Para calcular a soma, observamos que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Logo,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}\,.$$

(**b**) Observamos que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{\pi^n} = -3 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-3}{\pi}\right)^n$, o que corresponde a uma série geométrica de razão $-\frac{3}{\pi}$. Como $\left|-\frac{3}{\pi}\right| < 1$, essa série converge e a sua soma é dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{\pi^n} = -3 \frac{1}{1+\frac{3}{\pi}} = -\frac{3\pi}{3+\pi}\,.$$

(**c**) Usaremos o teste da razão. Se $b_n(x) = \frac{a_n x^n}{n!}$, temos, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|b_{n+1}(x)|}{|b_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \frac{|x|}{n+1} = \frac{\pi}{\pi}|x| \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0\,.$$

Portanto a série converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$; logo seu raio de convergência é $R = +\infty$.

Questão 2: (2.5 pontos)

(**a**) [2 pontos] Usar o método de soluções por séries de potências para resolver o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(x) + 2x\, y'(x) + 2y = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Determinar o domínio de definição da solução $y(x)$.

(**b**) [0.5 ponto] Calcular $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

Solução:

(**a**) Primeiramente observamos que $x = 0$ é um ponto ordinário para a equação diferencial $y'' + 2x\,y' + 2y = 0$. De fato, $p = 2x$ e $q = 2$ são polinômios e portanto, são funções analíticas em $x = 0$, ambas com raio de convergência infinito. Assim, procuraremos a solução do problema usando a representação de y como uma série de potências em torno do ponto $x = 0$, a qual também estará definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Lembramos que valem as igualdades:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{e} \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\,. \tag{1}$$

Usando as condições iniciais do problema e as relações acima, obtemos

$$y(0) = a_0 = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = a_1 = 0. \tag{2}$$

Substituindo as 3 relações em (1) na equação diferencial é obtida a seguinte igualdade:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0. \tag{3}$$

Agrupando convenientemente os termos da série (3) tem-se

$$2a_2 + 2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big[(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n\Big]x^n = 0,$$

de onde decorre a seguinte relação de recorrência:

$$a_2 + a_0 = 0 \Longleftrightarrow a_2 = -a_0, \tag{4}$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n = 0 \Longleftrightarrow a_{n+2} = -\frac{2a_n}{n+2},\ n \geq 1. \tag{5}$$

Agora procedemos com o cálculo dos termos de ordem par. Notamos o seguinte padrão procedente da recorrência (4) - (5):

$$a_2 = -a_0 = -1,\ a_4 = -\frac{2a_2}{4} = \frac{1}{2},\ a_6 = -\frac{2a_4}{6} = -\frac{1}{2\cdot 3},\ \ldots,\ a_{2\kappa} = (-1)^\kappa\frac{1}{\kappa\,!}, \quad \kappa \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, como $a_1 = 0$, todo os termos de ordem ímpar sempre se anulam de acordo com a recorrência (4) - (5), ou seja, $a_{2\kappa+1} = 0$ para todo $\kappa \in \mathbb{N}$.

Pondo as relações encontradas para $a_{2\kappa}$ e $a_{2\kappa+1}$ na primeira expressão de (1) obtemos que a solução do problema é dada pela série de potências

$$y(x) = \sum_{\kappa=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\kappa}{\kappa\,!}x^{2\kappa}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

(**b**) Lembramos que o desenvolvimento em série de potências da função $f(x) = e^x$ é dado por

$$e^x = \sum_{\kappa=0}^{+\infty}\frac{x^\kappa}{\kappa\,!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$e^{-x^2} = \sum_{\kappa=0}^{+\infty}\frac{(-x^2)^\kappa}{\kappa\,!} = \sum_{\kappa=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\kappa x^{2\kappa}}{\kappa\,!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

que coincide com o desenvolvimento da solução encontrada em (6). Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0.$$

Questão 3: (2 pontos)

(**a**) [1 ponto] Calcular a transformada de Laplace da função f definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{2}\,, \\ e^t \operatorname{sen} t & \text{se} \quad t \geq \frac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

(**b**) [1 ponto] Seja g uma função definida sobre $[0, +\infty)$ cuja derivada é seccionalmente contínua e de ordem exponencial. Se além disso $g(0) = 1$ e $\mathcal{L}[g(t)](s) = \arctan(s)$, calcular $\mathcal{L}\Big[e^{2t} g'(t)\Big](s)$.

Solução:

(**a**) Escrevemos f na forma $f(t) = u_{\frac{\pi}{2}}(t)\, e^{t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}}\, u_{\frac{\pi}{2}}(t)\, e^{t-\frac{\pi}{2}} \cos(t - \frac{\pi}{2})$. Usando as fórmulas (7), (8) e (5) da tabela anexada, obtemos que

$$\mathcal{L}[f](s) = e^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}s} \mathcal{L}\left[e^t \cos(t)\right](s) = e^{\frac{\pi}{2}(1-s)} \mathcal{L}\left[\cos(t)\right](s-1) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}(1-s)}(s-1)}{1+(s-1)^2}, \quad \forall\, s > 1\,.$$

(**b**) Usando a fórmula (9) da tabela anexada, calculamos $\mathcal{L}[g'](s) = s \arctan(s) - 1$. Logo, pela fórmula tem-se (8):

$$\mathcal{L}\Big[e^{2t} g'(t)\Big](s) = \mathcal{L}[g'](s-2) = (s-2)\arctan(s-2) - 1, \quad \forall\, s > 1\,.$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Resolver o problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = g(t)\,, \\ y(0) = y'(0) = 0\,, \end{cases}$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq t < 3\,, \\ 2 & \text{se} \quad 3 \leq t < 5\,, \\ 0 & \text{se} \quad t > 5\,. \end{cases}$$

Solução:

Escrevemos g na forma $g(t) = 2u_3(t) - 2u_5(t)$. Assim, segue das fórmulas (1) e (7) da tabela

$$\mathcal{L}[g](s) = \Big(e^{-3s} - e^{-5s}\Big)\frac{2}{s}\,.$$

Portanto, deduzimos aplicando a transformada de Laplace à equação e usando a fórmula (9) e as condições iniciais

$$\mathcal{L}[y'' + 4y](s) = s^2 \mathcal{L}[y](s) - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}[y](s) = (s^2+4)\mathcal{L}[y](s) = \Big(e^{-3s} - e^{-5s}\Big)\frac{2}{s}\,.$$

Daí, obtemos

$$\mathcal{L}[y](s) = \Big(e^{-3s} - e^{-5s}\Big)\frac{2}{s(s^2+4)} = \Big(e^{-3s} - e^{-5s}\Big)H(s), \quad \text{onde } H(s) = \frac{2}{s(s^2+4)}\,. \tag{7}$$

Para achar a transformada inversa de H, $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[H(s)\Big](t)$, expandimos H em frações parciais

$$H(s) = \frac{2}{s(s^2+4)} = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+4} = \frac{s^2(a+b)+cs+4a}{s(s^2+4)}.$$

Identificando os coeficientes, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a+b=0; \\ c=0; \\ 4a=2. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=\frac{1}{2}; \\ b=-\frac{1}{2}; \\ c=0. \end{cases}$$

As fórmulas (1) e (5) da tabela implicam então que

$$H(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[1](s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos(2t)](s) = \mathcal{L}[h](s) \quad \text{onde} \quad h(t) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\,. \tag{8}$$

Finalmente, concluímos de (7), (8) e da fórmula (7) da tabela

$$y(t) = u_3(t)h(t-3) - u_5(t)h(t-5) = \frac{1}{2}\Big(u_3(t)-u_5(t)\Big) - \frac{1}{2}\Big(u_3(t)\cos\Big(2(t-3)\Big) - u_5(t)\cos\Big(2(t-5)\Big)\Big)\,.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

Duração da prova: duas horas

TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE NO VERSO

Tabela Básica de Transformadas de Laplace

(1) $$\mathcal{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}\ .$$

(2) $$\mathcal{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}\ .$$

(3) $$\mathcal{L}\left[t^{n}\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\ .$$

(4) $$\mathcal{L}\left[\operatorname{sen} at\right](s) = \frac{a}{s^2+a^2}\ .$$

(5) $$\mathcal{L}\left[\cos at)\right](s) = \frac{s}{s^2+a^2}\ .$$

(6) $$\mathcal{L}\left[\delta(t-c)\right](s) = e^{-cs}\ .$$

(7) $$\mathcal{L}\left[u_c(t)\, f(t-c)\right](s) = e^{-cs}\mathcal{L}[f(t)](s)\ .$$

(8) $$\mathcal{L}\left[e^{ct}\, f(t)\right](s) = \mathcal{L}[f](s-c)\ .$$

(9) $$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s) = s^n\,\mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - \cdots f^{(n-1)}(0)\ .$$