Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral IV - MAC248
Gabarito 2øprova unificada - Escola Politécnica / Escola de Química - 20/12/2022

TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (3 pontos)
Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = \cos(t) + u_\pi(t)\cos(t), \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

onde $u_\pi(t)$ é a função degrau unitária com descontinuidade em π.

Solução:
Aplicando a transformada de Laplace ao termo inomogêneo, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(t) + u_\pi(t)\cos(t)] &= \mathcal{L}[\cos(t)] - \mathcal{L}[u_\pi(t)\cos(t-\pi)] \\ &= (1 - e^{-\pi s})\mathcal{L}[\cos(t)] \\ &= \frac{(1 - e^{-\pi} s)}{(s^2+1)}. \end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Laplace à equação, obtemos

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}[y'' + 4y' + 5y] &= \frac{(1-e^{-\pi s})s}{(s^2+1)} \\ \Rightarrow\quad & \mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y'] + 5\mathcal{L}[y] &= \frac{(1-e^{-\pi s})s}{(s^2+1)} \\ \Rightarrow\quad & (-y'(0) - sy(0) + s^2\mathcal{L}[y]) & \\ & \qquad + 4(-y(0) + s\mathcal{L}[y]) + 5\mathcal{L}[y] &= \frac{(1-e^{-\pi s})s}{(s^2+1)} \\ \Rightarrow\quad & (s^2+4s+5)\mathcal{L}[y] - (s+4) &= \frac{(1-e^{-\pi s})s}{(s^2+1)} \\ \Rightarrow\quad & \mathcal{L}[y] &= \frac{(s+4)}{(s^2+4s+5)} + \frac{(1-e^{-\pi s})s}{(s^2+4s+5)(s^2+1)}. \end{aligned}$$

Em primeiro lugar temos

$$\frac{(s+4)}{(s^2+4s+5)} = \frac{(s+2)}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{(s+2)^2+1} = \mathcal{L}[f](s),$$

onde

$$f(t) := e^{-2t}\cos(t) + 2e^{-2t}\text{sen}(t).$$

Em seguida, aplicando a técnica de frações parciais à parte racional do segundo termo do lado direito, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4s+5)} &= \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{cs+d}{s^2+4s+5} \\ &= \frac{(as+b)(s^2+4s+5) + (cs+d)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4s+5)} \\ &= \frac{(a+c)s^3 + (4a+b+d)s^2 + (5a+4b+c)s + (5b+d)}{(s^2+1)(s^2+4s+5)}. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes dos dois lados, obtemos

$$\begin{aligned} a + c &= 0, \\ 4a + b + d &= 0, \\ 5a + 4b + c + 1, &\text{ e} \\ 5b + d &= 0, \end{aligned}$$

e segue que

$$a = \frac{1}{8},\ b = \frac{1}{8},\ c = -\frac{1}{8},\ \text{e } d = -\frac{5}{8}.$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4s+5)} &= \frac{(s+1)}{8(s^2+1)} - \frac{(s+5)}{8((s+2)^2+1)} \\ &= \frac{s}{8(s^2+1)} + \frac{1}{8(s^2+1)} - \frac{(s+2)}{8((s+2)^2+1)} - \frac{3}{8((s+2)^2+1)} \\ &= \mathcal{L}[g](s), \end{aligned}$$

onde

$$g(t) := \frac{1}{8}\cos(t) + \frac{1}{8}\text{sen}(t) - \frac{1}{8}e^{-2t}\cos(t) - \frac{3}{8}e^{-2t}\text{sen}(t).$$

Concluímos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}[f] + (1 - e^{-\pi s})\mathcal{L}[g] \\ &= \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g] - e^{-\pi s}\mathcal{L}[g] \\ &= \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g] - \mathcal{L}[u_\pi(t)g(t-\pi)]. \end{aligned}$$

Isto é

$$y = f(t) + g(t) - u_\pi(t)g(t-\pi).$$

Questão 2: (2 pontos)

Dada a função

$$f : [0,2] \to \mathbb{R}; x \mapsto e^x + e^{-x}.$$

(a) Determine a série de Fourier em cossenos dessa função.

Solução:

Pelas fórmulas de Euler–Fourier

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx \\ &= \int_0^2 (e^x + e^{-x})dx \\ &= [e^x - e^{-x}]_0^2 dx \\ &= e^2 - e^{-2} \\ &= 2\text{senh}(2), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &= \int_0^2 e^x\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx + \int_0^2 e^{-x}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &= \left[e^x\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^2 + \frac{m\pi}{2}\int_0^2 e^x\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &\quad - \left[e^{-x}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^2 - \frac{m\pi}{2}\int_0^2 e^{-x}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &= (e^2 - e^{-2})(-1)^m + \left[e^x\frac{m\pi}{2}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^2 - \frac{m^2\pi^2}{4}\int_0^2 e^x\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &\quad + \left[e^{-x}\frac{m\pi}{2}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^2 - \frac{m^2\pi^2}{4}\int_0^2 e^{-x}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &= 2(-1)^m\text{senh}(2) - \frac{m^2\pi^2}{4}a_m. \end{aligned}$$

Resolvendo essa equação, obtemos

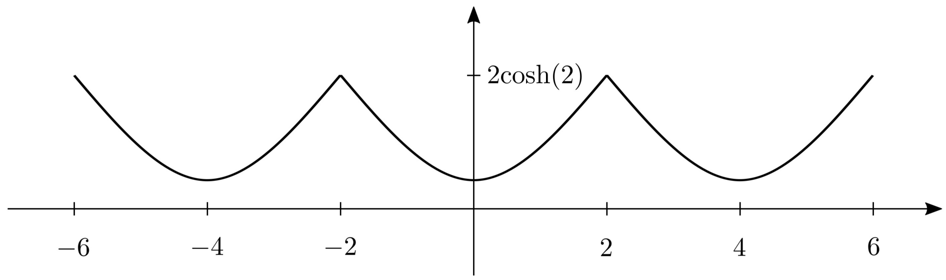
$$a_m = \frac{8(-1)^m\text{senh}(2)}{(m^2\pi^2 + 4)},$$

e segue que

$$f(x) = \text{senh}(2) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8(-1)^m\text{senh}(2)}{(m^2\pi^2 + 4)}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right).$$

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no Item (a) no intervalo $[-6, 6]$.

Solução:



(c) Calcule a soma da série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2\pi^2 + 4}.$$

Solução:
Pelo teorema de convergência de Fourier,

$$\begin{aligned} 2\cosh(2) &= f(2) \\ &= \operatorname{senh}(2) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8(-1)^m \operatorname{senh}(2)}{(m^2\pi^2+1)} \cos(m\pi) \\ &= \operatorname{senh}(2) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8\operatorname{senh}(2)}{(m^2\pi^2+1)}. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2\pi^2+4)} &= \frac{1}{4}\left(\coth(2) - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(e^2 + 3e^{-2})}{8(e^2 - e^{-2})}. \end{aligned}$$

Questão 3: (2 pontos)
Determine todos os valores de λ para os quais existe ao menos uma solução não nula da seguinte EDO com condições de contorno.

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, \\ y(1) = 0, \; y(2) = 0. \end{cases}$$

Dica: trata-se de uma equação de Euler.

Solução:
Como trata-se de uma equação de Euler, procuramos soluções da forma

$$y = x^\alpha.$$

Substituindo essa fórmula na equação, obtemos

$$\begin{aligned} & x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+x\alpha x^{\alpha-1}+\lambda x^\alpha = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^\alpha(\alpha^2+\lambda) \qquad\qquad\qquad\quad = 0. \end{aligned}$$

A equação indicial dessa equação de Euler é

$$\alpha^2+\lambda=0.$$

Há 3 casos a serem estudados.

1^o Caso - $\lambda<0:$ A solução geral é

$$y=Ax^{\sqrt{|\lambda|}}+Bx^{-\sqrt{|\lambda|}}.$$

Substituindo nas condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} 0 &= y(1)=A+B, \text{ e} \\ 0 &= y(2)=A2^{|\lambda|}+B2^{-|\lambda|} \end{aligned}$$

Segue que $A=B=0$, e não há soluções não nulas nesse caso.

2^o Caso - $\lambda=0:$ A solução geral é

$$y=Ax+B.$$

Substituindo nas condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} 0 &= y(1)=A, \text{ e} \\ 0 &= y(2)=A+B\log_e(2). \end{aligned}$$

Segue que $A=B=0$, e também não há soluções não nulas nesse caso.

3^o Caso - $\lambda>0:$ A solução geral é

$$y=Ax^{i\sqrt{\lambda}}+Bx^{i\sqrt{\lambda}}=a\cos(\sqrt{\lambda}\log_e(x))+b\text{sen}(\sqrt{\lambda}\log_e(x)).$$

Substituindo nas condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} 0 &= y(1)=a, \text{ e} \\ 0 &= y(2)=a\cos(\sqrt{\lambda}\log_e(2))+b\text{sen}(\sqrt{\lambda}\log_e(2)). \end{aligned}$$

Isto é

$$\begin{aligned} a &= 0, \text{ e} \\ b\text{sen}(\sqrt{\lambda}\log_e(2)) &= 0. \end{aligned}$$

Segue que há soluções não triviais se e somente se

$$\begin{aligned} & \text{sen}(\sqrt{\lambda}\log_e(2))=0 \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{\lambda}\log_e(2) \qquad = m\pi, \ m>0 \text{ inteiro} \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda \qquad\qquad\qquad = \frac{m^2\pi^2}{\log_e(2)^2}. \end{aligned}$$

Questão 4: (3 pontos)

Considere a equação diferencial

$$x^2y'' + (1-x)xy' - 2y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular dessa equação.

Solução:
A equação é

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2, \\ Q(x) &= (1-x)x, \text{ e} \\ R(x) &= -2. \end{aligned}$$

Como $P(0) = 0$, 0 é um ponto singular dessa equação. Determinamos agora os limites

$$\alpha := \lim_{x\to 0} \frac{xQ(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-x)x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}(1-x) = 1, e$$
$$\beta := \lim_{x\to 0} \frac{x^2R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} -2 = -2.$$

Como esses limites existem e são finitos, 0 é um ponto singular regular dessa equação.

(b) Determine as duas raízes da equação indicial do problema nesse ponto.

Solução:
A equação de Euler associada é

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0,$$

onde α e β são os limites obtidos na primeira parte da questão. Isto é

$$x^2y'' + xy' - 2y = 0.$$

A equação indicial dessa equação de Euler é

$$r^2 - 2 = 0,$$

com raízes

$$r = \pm\sqrt{2}.$$

(c) Determine a relação de recorrência da solução em séries associada à maior das duas raízes.

Solução:

Procuramos soluções da forma

$$\begin{aligned} y &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r},\ a_0 \neq 0 \\ \Rightarrow\quad y' &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1} \\ \Rightarrow\quad y'' &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação, temos

$$\begin{aligned} & x^2 \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-2} + (1-x)x \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r-1} \\ & \qquad - 2\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r} \\ & \qquad - \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r+1} - 2\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r} \\ & \qquad - \sum_{m=1}^{\infty}(m+r-1)a_{m-1} x^{m+r} - 2\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{m=0}^{\infty}\big((m+r)(m+r-1)a_m + (m+r)a_m - (m+r-1)a_{m-1} - 2a_m\big)x^{m+r} \\ & \qquad + \big(r(r-1)a_m + ra_m - 2a_0\big)x^r = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{m=0}^{\infty}\big(((m+r)^2-2)a_m - (m+r-1)a_{m-1}\big)x^{m+r} + (r^2-2)a_0x^r = 0. \end{aligned}$$

Segue pelo teorema de Taylor que

$$\begin{aligned} (r^2-2)a_0 &= 0, \text{e} \\ ((m+r)^2-2)a_m - (m+r-1)a_{m-1} &= 0, \forall m \geqslant 1. \end{aligned}$$

Verificamos que a equação indicial é, de fato,

$$r^2 - 2 = 0.$$

A relação de recorrência é

$$a_m = \frac{(m+r-1)a_{m-1}}{((m+r)^2-2)},\ \forall m \geqslant 1,$$

e quando $r = \sqrt{2}$, a relação de recorrência é

$$a_m = \frac{(m + \sqrt{2} - 1)a_{m-1}}{(m^2 + 2\sqrt{2})}, \ \forall m \geqslant 1.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A - Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s > 0$
$t^m\ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
$t^m e^{at}\ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s > a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
$\delta_a(t)f(t)$	$e^{-as}f(a)$
$u_a(t)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$