TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (3 pontos)
Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = \cos(t) + u_\pi(t)\cos(t), \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

onde $u_\pi(t)$ é a função degrau unitária com descontinuidade em π.

Questão 2: (2 pontos)
Dada a função

$$f : [0,2] \to \mathbb{R}; x \mapsto e^x + e^{-x}.$$

(a) Determine a série de Fourier em cossenos dessa função.

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no Item (a) no intervalo $[-6, 6]$.

(c) Calcule a soma da série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2\pi^2 + 4}.$$

Questão 3: (2 pontos)
Determine todos os valores de λ para os quais existe ao menos uma solução não nula da seguinte EDO com condições de contorno.

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, \\ y(1) = 0,\ y(2) = 0. \end{cases}$$

Dica: trata-se de uma equação de Euler.

Questão 4: (3 pontos)
Considere a equação diferencial

$$x^2y'' + (1 - x)xy' - 2y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular dessa equação.

(b) Determine as duas raízes da equação indicial do problema nesse ponto.

(c) Determine a relação de recorrência da solução em séries associada à maior das duas raízes.

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

Copyright © 2022, Departamento de Matemática, IM-UFRJ, Reservados todos os direitos. É permitida a cópia, reprodução ou distribuição deste texto, no todo ou em parte, apenas para fins não lucrativos

A - Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s > 0$
$t^m\ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
$t^m e^{at}\ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s > a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \lvert a\rvert$
$\delta_a(t)f(t)$	$e^{-as}f(a)$
$u_a(t)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$

Copyright © 2022, Departamento de Matemática, IM-UFRJ, Reservados todos os direitos. É permitida a cópia, reprodução ou distribuição deste texto, no todo ou em parte, apenas para fins não lucrativos