UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito da Prova Final Unificada de Cálculo IV - 2019/2, 26/11/2019

Questão 1: (2,5 pontos) Determine a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo. Justifique.

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \,(n!)^3}{(3n)!}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-3n} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Solução:

a) Como $a_n := \frac{2^n (n!)^3}{(3n)!} > 0$, a série é de termos positivos $|a_n| = a_n$. Aplicando o teste da razão:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\,((n+1)!)^3}{(3(n+1))!} \frac{(3n)!}{2^n\,(n!)^3}, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)^3(n!)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)((3n)!)} \frac{(3n)!}{2^n\,(n!)^3}, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2}{3(3n+2)(3n+1)}, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+4n+2}{27n^2+9n+6}, \\
&= \frac{2}{27} < 1.
\end{aligned}$$

Logo a série converge absolutamente, e portanto converge.

b)1° *via de Solução:*

Como $a_n := e^{-3n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2} > 0$, a série é de termos positivos $|a_n| = a_n$. Aplicando o teste da raiz:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{-3n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}}, \\
&= e^{-3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n}, \\
&= e^{-3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}, \\
&= e^{-3} \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{2}{n})^n}{(1+\frac{1}{n})^n}, \\
&= e^{-3}\frac{e^2}{e}, \\
&= e^{-2} < 1.
\end{aligned}$$

Logo a série converge absolutamente, e portanto converge.
2° *via de Solução:*
Como $a_n := e^{-3n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2} > 0$, a série é de termos positivos $|a_n| = a_n$. Aplicando o teste da razão:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-3(n+1)}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{(n+1)^2}}{e^{-3n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}},\\
&= e^{-3}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{(n+1)^2}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}},\\
&= e^{-3}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{(n+1)^2}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2}},\\
&= e^{-3}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{(n+2)}\right)^{\frac{(n+1)^2}{(n+2)}}}{\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{n^2}{(n+1)}}},\\
&= e^{-3}\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{(n+1)^2}{(n+2)}}}{e^{\frac{n^2}{(n+1)}}},\\
&= e^{-3}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{(n+1)^2}{(n+2)}-\frac{n^2}{(n+1)}},\\
&= e^{-3}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n^2+3n}{(n+2)(n+1)}},\\
&= e^{-3}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n^2+3n}{n^2+3n+2}},\\
&= e^{-3}e,\\
&= e^{-2} < 1.
\end{aligned}
$$

Logo a série converge absolutamente, e portanto converge.

Questão 2: (2,5 pontos) Encontre os valores de δ de modo que a solução $y(x)$ do problema de valor inicial:

$$
\begin{cases} x^2y'' + 3xy' - 3y = 0,\\ y(1) = \delta, \quad y'(1) = 1,\end{cases}
$$

seja limitada quando $x \to 0^+$.

Solução:

A equação de Euler tem solução de forma $y(x) = x^r$. Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos $x^2r(r-1)x^{r-2}+3xrx^{r-1}-3x^r = 0 \Rightarrow x^r(r^2+2r-3) = 0$. Como as raizes de $r^2 + 2r - 3 = 0$ são $r = -3$ e $r = 1$, tem-se que a solução geral da EDO é dada por $y(x) = Ax^{-3} + Bx$, onde A, B são constantes e $x > 0$.
$\delta = y(1) = A + B$ e $1 = y'(1) = -3A + B$. Daqui $A = \frac{\delta-1}{4}$ e $B = \frac{3\delta+1}{4}$. A solução do PVI torna-se

$$
y(x) = \frac{\delta-1}{4x^3} + \frac{3\delta+1}{4}x
$$

Como $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^3} = \infty$, a solução sera limitada quando $x \to 0+$ se e somente se $\delta = 1$.

Questão 3: (2,5 pontos) Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

a) Determine a série de Fourier de f.

b) Esboce o gráfico da série de Fourier de f obtida no item (a) no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

c) Calcule a soma da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}.$$

Solução:
a) Estendemos f de modo a ser periódica de período 2π. A série de Fourier de f é a série

$$SF(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \ ,$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \ , \qquad k \ge 1$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx \ , \qquad k \ge 1$$

Temos então

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-\pi)dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} xdx = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Os coefficientes a_k, $k \ge 1$ se calculam:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-\pi)\cos(kx)dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x\cos(kx)dx \\ &= -\frac{\sin(kx)}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\cos(kx)}{k^2\pi}\Big|_{0}^{\pi} + \frac{x\sin(kx)}{k\pi}\Big|_{0}^{\pi} \\ &= 0 + \frac{\cos(k\pi) - 1}{k^2\pi} + 0 = \frac{\cos(k\pi) - 1}{k^2\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi} = \begin{cases} 0 & k \text{ par} \\ -\dfrac{2}{k^2\pi} & k \text{ ímpar} \end{cases} \end{aligned}$$

Em outras palavras, se $k \geq 1$:

$$a_{2k-1} = \frac{-2}{(2k-1)^2\pi} \ , \qquad a_{2k} = 0$$

Calculamos agora os coefficientes b_k:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-\pi)\sin(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(kx)dx \\
&= \left.\frac{\cos(kx)}{k}\right|_{-\pi}^{0} + \left.\frac{\sin(kx)}{k^2\pi}\right|_0^{\pi} - \left.\frac{x\cos(kx)}{k\pi}\right|_0^{\pi} \\
&= \frac{1-\cos(k\pi)}{k} + 0 - \frac{\pi\cos(k\pi)}{k\pi} = \frac{1-2\cos(k\pi)}{k} = \frac{1-2(-1)^k}{k} = \begin{cases} \dfrac{-1}{k} & k \text{ par} \\ \dfrac{3}{k} & k \text{ ímpar} \end{cases}
\end{aligned}$$

A Série de Fourier de f é então

$$SF(f)(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi}\cos(kx) + \frac{1-2(-1)^k}{k}\sin(kx)\right) \ .$$

b) Lembramos o

Teorema de Convergência de Fourier. *Supomos que f e f' sejam contínuas por partes no intervalo $[-L, L]$. Supomos também que f esteja definida fora do intervalo $[-L, L]$ de modo a ser periódica de período $T = 2L$. Então f tem uma Série de Fourier*

$$SF(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

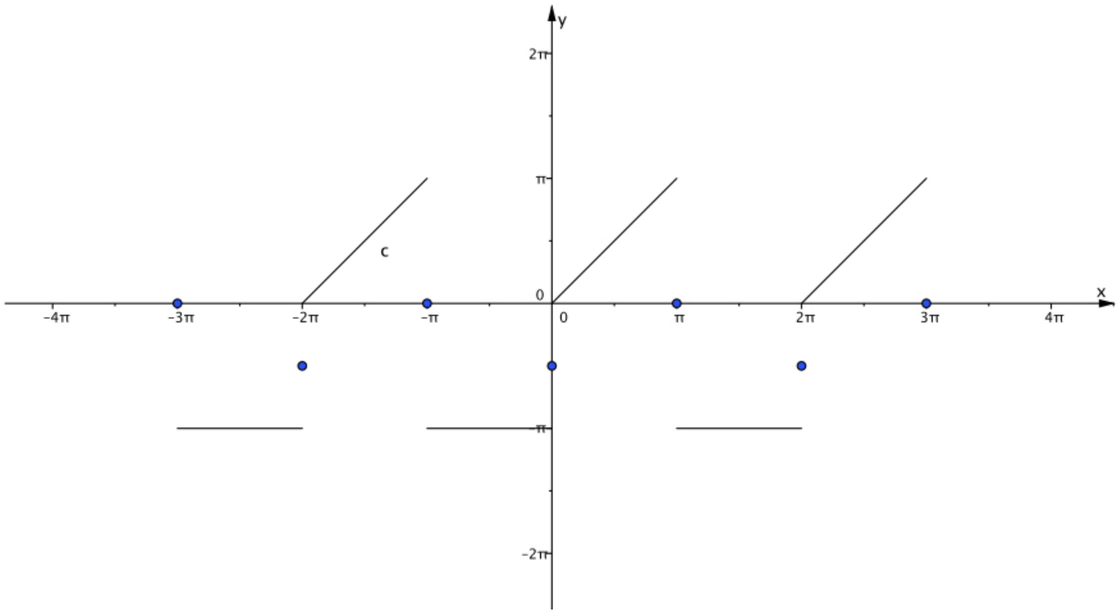
onde a_k e b_k são dados pelas fórmulas acima. Além disso, a série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos onde f é contínua e converge para $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ em todos os pontos onde f é descontínua.

No nosso caso f e f' satisfazem as hipóteses do teorema no intervalo $[-\pi, \pi]$, com $T = 2\pi$. A função f é descontínua, no seu intervalo $(-\pi, \pi]$, em $x = 0$, $x = \pi$. Então pelo Teorema de Convergência de Fourier temos que

i) $x = 0 \implies$ a série de Fourier converge a $\dfrac{f(0^-)+f(0^+)}{2} = \dfrac{-\pi+0}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$

ii) $x = \pi \implies$ a série de Fourier converge a $\dfrac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2} = \dfrac{-\pi+\pi}{2} = 0$

Estendendo por periodicidade 2π entre -3π e 3π, obtemos o gráfico da Série:



c) Usamos o fato que $a_k = 0$ se k é par (maior ou igual a 1) e que $\cos(k\pi/2) = 0$ se k é impar. Então temos que

$$a_k \cos(k\pi/2) = 0 \qquad \forall k \geq 1 \ .$$

Desta observação e do ponto b) deduzimos que

$$\pi/2 = SF(f)(\pi/2) = -\pi/4 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - 2(-1)^k}{k} \sin(k\pi/2) \ .$$

Então

$$\frac{3\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - 2(-1)^k}{k} \sin(k\pi/2) \ .$$

Agora $\sin(k\pi/2) = 0$ se k é par. Do outro lado, temos que $\sin((2k-1)\pi/2) = (-1)^{k-1}$.
Então

$$\begin{aligned}\frac{3\pi}{4} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - 2(-1)^k}{k} \sin(k\pi/2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - 2(-1)^{2k-1}}{k} \sin(\frac{(2k-1)\pi}{2}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2k-1} (-1)^{k-1} = 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \ .\end{aligned}$$

Deduzimos então que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4} \ .$$

Questão 4: (2.5 pontos) Determine a solução $u(x,t)$ do problema

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} + u & x \in (0, 2\pi)\,,\ t \in (0, \infty)\,, \\ u(0,t) = u(2\pi, t) = 0 & t \in (0, \infty)\,, \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0, 2\pi)\,, \\ u_t(x,0) = 0 & x \in (0, 2\pi)\,, \end{cases}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } \ 0 \leq x \leq \pi, \\ (2\pi - x) & \text{se } \ \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Solução:
Supondo que a solução tem a forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ chegamos as seguintes equacões para as funções X e T

$$\begin{aligned} &X''T = T''X + XT \\ \iff &\frac{X''}{X} = \frac{T'' + T}{T}, \end{aligned}$$

Como o lado esquerdo é uma função de x e o lado direito é uma função de t temos que ambos lados são iguais a mesma constante que denotamos por $-\lambda$. Assim obtemos as seguintes EDO's para as funções X e T

$$\begin{aligned} &X'' + \lambda X = 0, \\ &T'' + (1 + \lambda)T = 0. \end{aligned}$$

Sustituindo nas condições de contorno temos que

$$\begin{aligned} 0 = u(0,t) = X(0)T(t) \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow \quad X(0) = 0, \\ 0 = u(2\pi,t) = X(2\pi)T(t) \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow \quad X(2\pi) = 0. \end{aligned}$$

Os autovalores e as autofunções do problema

$$\begin{aligned} &X'' + \lambda X = 0, \\ &X(0) = 0 \quad X(2\pi) = 0, \end{aligned}$$

são $\lambda_n = n^2\pi^2/(2\pi)^2 = n^2/4$ e $X_n = \sin(xn/2)$ respetivamente, para $n \in \{1, 2, 3 \ldots\}$. Substituindo λ_n na equação da função T e usando a condição inicial $u_t(x,0) = 0$ para todo $x \in [0, 2\pi]$ temos a seguinte equação

$$\begin{aligned} &T_n'' + (1 + n^2/4)T_n = 0, \\ &T_n'(0) = 0. \end{aligned}$$

A solução geral desta equação é $T_n(t) = a\cos\left(t\sqrt{1 + n^2/4}\right) + b\sin\left(t\sqrt{1 + n^2/4}\right)$. Pela condição inicial temos que $b = 0$ e assim uma solução é $T_n(t) = \cos\left(t\sqrt{1 + n^2/4}\right)$ e as soluções parciais do problema são

$$u_n(x,t) = \sin(nx/2)\cos\left(t\sqrt{1 + n^2/4}\right).$$

Segue pelo princípio de superposição que a solução geral do problema é

$$u(x,t) = \sum_{n=1} b_n \sin(nx/2)\cos\left(t\sqrt{1+n^2/4}\right),$$

onde

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(xn/2)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin\left(\frac{nx}{2}\right)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - x)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{4}{n^2}\sin(nx/2)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\frac{2}{n}x\cos(nx/2)\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n}\cos(nx/2)\Big|_{\pi}^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\frac{4}{n^2}\sin(nx/2)\Big|_{\pi}^{2\pi} \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\frac{2}{n}x\cos(nx/2)\Big|_{\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{4}{\pi n^2}\sin(n\pi/2) - \frac{2}{n}\cos(n\pi/2) - \frac{4}{n}\cos(n\pi) + \frac{4}{n}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi}\sin(n\pi) + \frac{4}{n^2\pi}\sin(n\pi/2) \\
&\quad + \frac{4}{n}\cos(n\pi) - \frac{2}{n}\cos(n\pi/2) \\
&= \frac{8}{n^2\pi}\sin(n\pi/2) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k \\ \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi} & \text{se } n = 2k+1. \end{cases}
\end{aligned}$$

E finalmente obtemos que

$$u(x,t) = \sum_{k=0} \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi}\sin((2k+1)x/2)\cos\left(t\sqrt{1+(2k+1)^2/4}\right).$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

B.

$$\int x\cos(ax)dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\mathrm{sen}(ax).$$
$$\int x\mathrm{sen}(ax)dx = \frac{1}{a^2}\mathrm{sen}(ax) - \frac{x}{a}\cos(ax).$$

C. O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$