UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Prova Final Unificada de Cálculo IV - 2019/2, 26/11/2019

Questão 1: (2,5 pontos) Determine a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo. Justifique.

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\,(n!)^3}{(3n)!}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-3n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Questão 2: (2,5 pontos) Encontre os valores de δ de modo que a solução $y(x)$ do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x^2y'' + 3xy' - 3y = 0, \\ y(1) = \delta, \quad y'(1) = 1, \end{cases}$$

seja limitada quando $x \to 0^+$.

Questão 3: (2,5 pontos) Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

a) Determine a série de Fourier de f.

b) Esboce o gráfico da série de Fourier de f obtida no item (a) no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

c) Calcule a soma da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}.$$

Questão 4: (2.5 pontos) Determine a solução $u(x,t)$ do problema

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} + u & x \in (0, 2\pi)\,,\ t \in (0, \infty)\,, \\ u(0,t) = u(2\pi, t) = 0 & t \in (0, \infty)\,, \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0, 2\pi)\,, \\ u_t(x,0) = 0 & x \in (0, 2\pi)\,, \end{cases}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le \pi, \\ (2\pi - x) & \text{se } \pi < x \le 2\pi. \end{cases}$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

B.

$$\int x\cos(ax)dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\text{sen}(ax).$$
$$\int x\text{sen}(ax)dx = \frac{1}{a^2}\text{sen}(ax) - \frac{x}{a}\cos(ax).$$

C. O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$