TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (2.5 pontos)

(a) Seja f a seguinte função

$$f(t) = \min\{t, 1\}, \qquad t \geq 0.$$

Esboce o gráfico da função e determine sua Transformada de Laplace.

(b) Utilize a Transformada de Laplace para calcular a seguinte integral impropria

$$\int_0^\infty e^{-t/2} \operatorname{sen}(2t) dt.$$

Solução:

(a) A função pode ser escrita como

$$f(t) = t + u_1(t)\,(1-t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in [0,1], \\ 1 & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

Então a transformada de Laplace de f é dada por $\mathcal{L}[f] = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2}$.

(b) Reconhecemos a integral acima como $F(1/2)$ onde $F = \mathcal{L}[f]$ e $f(t) = \operatorname{sen}(2t)$. Sabemos então que

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2}{s^2+4}, \\ \int_0^\infty e^{-t/2} \operatorname{sen}(2t) dt = F(1/2) &= \frac{2}{\frac{1}{4}+4} = \frac{8}{17}. \end{aligned}$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Supondo que $y(0) = y'(0) = 1$, calcule os quatro primeiros termos da solução na origem da equação

$$e^x y'' + xy = 0.$$

Solução:

A equação é equivalente à equação

$$y'' + xe^{-x} y = 0.$$

A função xe^{-x} é analítica em volta do ponto $x = 0$ então afirmamos que $x = 0$ é um ponto ordinário da equação. Buscamos uma solução da forma $y(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$. Então,

$$\begin{aligned} y''(x) &= \sum_{n=2}^\infty a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^\infty a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n, \\ xe^{-x} &= x\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^n}{n!} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n-1)!}, \\ xe^{-x}y &= \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n-1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^\infty a_n x^n\right). \end{aligned}$$

Igualando o termo constante (com $n = 0$) em y'' e o em $-xe^{-x}y$, temos $2a_2 = -0 \times a_0 = 0$, pois a segunda expressão não tem um termoo constante. Logo, $a_2 = 0$.

Igualando os coeficientes de x em y'' e o em $xe^{-x}y$, temos $6a_3 = -1 \times a_0 = -1$, e logo $a_3 = -1/6$.

Igualando os coeficientes de x^2, temos $12a_4 = -(1 \times a_1 + (-1) \times a_0) = -1 + 1 = 0$ e $a_4 = 0$.

Igualando os coeficientes de x^3, temos

$$20a_5 \;=\; -1 \times \left(\frac{1}{2}a_0 + (-1)a_1 + 1a_2\right) = \frac{1}{2},$$

e logo $a_5 = \frac{1}{40}$. Então, os primeiros quatro termos não nulos são

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_3 = \frac{-1}{6}, \quad a_5 = \frac{1}{40}.$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Encontre a solução $u(x, t)$ do problema de valor inicial e de contorno :

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} + u, & x \in (0, 4),\ t \in (0, \infty), \\ u(0, t) = u(4, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), & x \in [0, 4]. \end{cases}$$

Solução:

Tentamos uma solução usando separação de variaveis. Suponha que $u(x, t) = X(x)T(t)$ satisfaça a equação diferencial, com condições de contorno $u(0, t) = u(4, t) = 0$. Então para obter uma solução não trivial, devemos ter $X(0) = 0 = X(4)$ e

$$\begin{aligned} XT_t &= 3X_{xx}T + XT, \\ \frac{X_{xx}}{X} &= \frac{1}{3}\left(\frac{T_t}{T} - 1\right). \end{aligned}$$

Concluimos que ambos os lados da segunda equação valem alguma constante $-\lambda \in \mathbb{R}$. O problema de autovalor $X_{xx} + \lambda X = 0$, com $X(0) = X(4) = 0$ admite uma solução não trivial somente para $\lambda = \left(\frac{n\pi}{4}\right)^2$, e a solução é, ao menos multiplicação por uma constante, $X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)$. Para esse valor de λ, a solução da equação

$$\begin{aligned} T_t &= \left(1 - 3\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2\right)T, \\ \text{é } T_n(t) &= e^{(1-3(n\pi/4)^2)t}. \end{aligned}$$

Então para todo $n = 1, 2, \ldots$, temos a solução $u_n(x, t) = \operatorname{sen}(n\pi x/4)e^{(1-3(n\pi/4)^2)t}$. Para solução a última condição, montamos a soma infinita $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, t)$. Isso satisfaz $u(x, 0) = \sum_n a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ se os coeficientes a_n são escolhidos como

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{4}\int_0^4 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx, \\ &= \frac{1}{2}\int_0^4 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx - \frac{1}{2}\int_0^4 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx. \end{aligned}$$

A primeira integral a direita vale $\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$. Observamos que para $n=2$, isto vale 0. Para calcular a segunda integral, temos as identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(A+B) &= \operatorname{sen} A\cos B+\cos A \operatorname{sen} B,\\
\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{(n+2)\pi x}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{(n-2)\pi x}{4}\right)\right).
\end{aligned}$$

Para integrar isso, separar entre os casos $n=2$ e $n\neq 2$. Para $n=2$,

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx &= \frac{1}{2}\int_0^4 \operatorname{sen}(\pi x)\,dx,\\
&= \frac{-1}{2\pi}\cos(\pi x)\Big|_0^4 = 0.
\end{aligned}$$

Para $n\neq 2$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^4 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx &= \frac{1}{4}\int_0^4 \operatorname{sen}\left(\frac{(n+2)\pi x}{4}\right)dx+\frac{1}{4}\int_0^4 \operatorname{sen}\left(\frac{(n-2)\pi x}{4}\right)dx,\\
&= \frac{-1}{(n+2)\pi}\cos\left(\frac{(n+2)\pi x}{4}\right)\Big|_0^4+\frac{-1}{(n-2)\pi}\cos\left(\frac{(n-2)\pi x}{4}\right)\Big|_0^4,\\
&= \frac{1}{(n+2)\pi}(1-(-1)^2)+\frac{1}{(n-2)\pi}(1-(-1)^n).
\end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que $u(x,t)=\sum_n a_n \operatorname{sen}(n\pi x/4)e^{(1-3(n\pi/4)^2)t}$ é a solução para o problema de valor inicial e de contorno se os coeficientes são escolhidos por $a_2=0$, e para $n\neq 2$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n-2}\right)(1-(-1)^n),\\
&= \frac{-8}{\pi n(n+2)(n-2)}(1-(-1)^n)
\end{aligned}$$

Questão 4: (2.5 pontos)

(i) Encontre todos os valores de $\lambda\in\mathbb{R}$, e todas as soluções associadas, para os quais existem soluções não-nulas do problema de valor de contorno

$$y''+\lambda y'+4y=0,\quad y(0)=y(2)=0.$$

(ii) Para quais valores de $L>0$, não existe nenhuma solução não-trivial do problema de contorno

$$y''+\lambda y'+4y=0,\quad y(0)=y(L)=0$$

para qualquer valor de $\lambda\in\mathbb{R}$.

Solução:

(i) Tentamos uma solução $y(x)=e^{rx}$. Então necessariamente, $r^2+\lambda r+4=0$ e

$$r=\frac{-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-16}}{2}.$$

A forma da solução depende do sinal do descriminante $\Delta = \lambda^2 - 16$.

Se $\lambda^2 - 16 = \mu^2 > 0$ (para $\mu > 0$), então temos raízes reais r_1, r_2 disitntos e a solução geral é $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$. A condição $y(0) = 0 = A + B$ implica que $B = -A$ e $y(x) = A(e^{r_1 x} - e^{r_2 x})$. A condição $y(2) = 0$ dá $A(e^{2r_1} - e^{2r_2}) = 0$, mas $r_1 \neq r_2$ implica que $e^{2r_1} \neq e^{2r_2}$ e temos $A = 0$. Logo a única solução nesse caso é trivial. Isso aplica quando $\lambda^2 - 16 > 0$, ou seja $\lambda < -4$ e $\lambda > 4$.

Se $\lambda^2 - 16 = 0$ ($\lambda = \pm 4$), a raíz da equação indicial é repetida e a solução tem forma

$$y(x) = e^{-\lambda x/2}(Ax + B).$$

Se $y(0) = 0$, então $B = 0$, e se $y(2) = 0$, então $e^{-\lambda}.2A = 0$ e $A = 0$. Temos apenas a solução trivial nesse caso.

Se $\lambda^2 - 16 = -\mu^2 < 0$, as raízes da equação indicial são complexas e distintas. Isso acontece quando $\lambda = \sqrt{16 - \mu^2} \in (-4, 4)$ e $r = \frac{-\lambda}{2} \pm i\frac{\mu}{2}$. A solução geral da equação diferencial é

$$y(x) = Ae^{-\lambda x/2}\cos(\mu x/2) + Be^{-\lambda x/2}\operatorname{sen}(\mu x/2).$$

Então, a condição $y(0) = 0$ força $A = 0$, enquanto a condição $y(2) = 0$ dá $Be^{-\lambda}\operatorname{sen}(\mu) = 0$. Para obter uma solução não trivial, devemos ter $\mu = n\pi$ para algum $n = 1, 2, \ldots$. Isso quer dizer que para $\lambda = \pm\sqrt{16 - (n\pi)^2}$ a o problema de valor de contorno admite a solução

$$y(x) = e^{\mp\frac{1}{2}\sqrt{16-(n\pi)^2}x}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Porém, essa raíz quadrado é um número real somente se $16 - (n\pi)^2 \geq 0$, ou seja $n\pi \leq 4$. Então somente para $n = 1$ nós temos $\lambda = \pm\sqrt{16 - \pi^2}$, com soluções

$$y_+(x) = e^{-\frac{x}{2}\sqrt{16-\pi^2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad y_-(x) = e^{\frac{x}{2}\sqrt{16-\pi^2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

(ii) Para algum outro valor $L > 0$, no intervalo $[0, L]$, temos uma solção y com $y(0) = y(L) = 0$ se

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\frac{-\lambda x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\mu x}{2}\right), \quad -\mu^2 = \lambda^2 - 16, \\ y(L) &= e^{\frac{-\lambda L}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\mu L}{2}\right), \\ \text{logo,} \quad \frac{\mu L}{2} &= n\pi, \quad \mu = \frac{2\pi n}{L}. \end{aligned}$$

De novo, isso vem com a restrição de que

$$0 \leq \lambda^2 = 16 - \mu^2 = 16 - \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 \leq 16 - \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2.$$

Isso é impossível, ou não terá nenhuma solução não-trivial, se

$$16 - \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 < 0,$$
$$\text{ou seja,} \quad L < \frac{\pi}{2}.$$

Isso é dizer, nenhuma solução não-trivial de $y'' + \lambda y' + 4y = 0$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, satisfaz $y(0) = 0$, $y(L) = 0$.

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.	
f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>0$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>0$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-\ldots-f^{(m-1)}(0)$

Integrais úteis.

$$\int x^m\cos(\alpha x)dx=\frac{x^m}{\alpha}\operatorname{sen}(\alpha x)-\frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\operatorname{sen}(\alpha x)dx$$
$$\int x^m\operatorname{sen}(\alpha x)dx=-\frac{x^m}{\alpha}\cos(\alpha x)+\frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\cos(\alpha x)dx$$

O problema

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0\\ y(0)=0, y(L)=0\end{cases}$$

tem autovalores $\lambda=n^2\pi^2/L^2$, $n\in\mathbb{N}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$