TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (2.5 pontos)

(a) Seja f a seguinte função

$$f(t) = \min\{t, 1\}, \qquad t \geq 0.$$

Esboce o gráfico da função e determine sua Transformada de Laplace.

(b) Utilize a Transformada de Laplace para calcular a seguinte integral impropria

$$\int_0^\infty e^{-t/2} \operatorname{sen}(2t) dt.$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Supondo que $y(0) = y'(0) = 1$, calcule os quatro primeiros termos da solução na origem da equação

$$e^x y'' + xy = 0.$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Encontre a solução $u(x,t)$ do problema de valor inicial e de contorno :

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} + u, & x \in (0,4),\ t \in (0,\infty), \\ u(0,t) = u(4,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), & x \in [0,4]. \end{cases}$$

Questão 4: (2.5 pontos)

(i) Encontre todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, e todas as soluções associadas, para os quais existem soluções não-nulas do problema de valor de contorno

$$y'' + \lambda y' + 4y = 0, \quad y(0) = y(2) = 0.$$

(ii) Para quais valores de $L > 0$, não existe nenhuma solução não-trivial do problema de contorno

$$y'' + \lambda y' + 4y = 0, \quad y(0) = y(L) = 0$$

para qualquer valor de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s > 0$
$t^m\ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > 0$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s > 0$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \lvert a\rvert$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - \ldots - f^{(m-1)}(0)$

Integrais úteis.

$$\int x^m\cos(\alpha x)dx = \frac{x^m}{\alpha}\operatorname{sen}(\alpha x) - \frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\operatorname{sen}(\alpha x)dx$$
$$\int x^m\operatorname{sen}(\alpha x)dx = -\frac{x^m}{\alpha}\cos(\alpha x) + \frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\cos(\alpha x)dx$$

O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, y(L) = 0 \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, $n \in \mathbb{N}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$