TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (2.5 pontos)

Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{m^2}\right)$,

Solução:

Todos os termos desta série são positivos. Comparando com a p-série com $p = 2$, temos

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{m^2}\right)/\frac{1}{m^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

Como este limite existe e é finito, segue pelo teste de comparação no limite que esta série é convergente.

(b) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sqrt{\frac{1+m^2}{1+m^4}}$,

Solução:

Esta série é uma série alternada da forma

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m f(m),$$

onde, para todo m, a função f é dada por

$$f(m) := \sqrt{\frac{1+m^2}{1+m^4}}.$$

Esta função é positiva,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

e, no intervalo $[1, \infty[$, sua derivada é

$$f'(x) = \sqrt{\frac{1+x^4}{1+x^2}}\frac{2x-4x^3-2x^5}{(1+m^4)^2} \leq 0.$$

Segue que esta função é decrescente no intervalo $[1, \infty[$, e segue pelo teste da série alternada que esta série é convergente. Enfim, comparando sua série de valores absolutos com a série harmônica, temos

$$\lim_{m\to\infty} f(m)/\frac{1}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{m\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{1+m^4}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\sqrt{1+m^{-2}}}{\sqrt{1+m^{-4}}} = 1.$$

Como este limite existe e é finito, segue pelo teste de comparação no limite que a série de valores absolutos é divergente. Esta série é então condicionalmente convergente.

(c) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)\big(\log_e(m+1)\big)^2}$.

Solução:
A série de valores absolutos desta série é

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(m),$$

onde, para todo m, a função f é dada por

$$f(m) = \frac{1}{(m+1)\big(\log_e(m+1)\big)^2}.$$

Esta função é positiva, decrescente e

$$\lim_{m\to+\infty} f(m) = 0.$$

Enfim, temos

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} f(x)dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\big(\log_e(x+1)\big)^2}dx \\
&= \int_{\log_e(2)}^{\infty} \frac{1}{y^2}dy \\
&= \left[\frac{-1}{y}\right]_{\log_e(2)}^{\infty} \\
&= \frac{1}{\log_e(2)}.
\end{aligned}$$

Como esta integral é convergente, segue pelo teste da integral que a série de valores absolutos é convergente. Esta série é então absolutamente convergente.

Questão 2: (2.5 pontos)
Considere a seguinte função

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{y^2}\operatorname{arctanh}(y^2)dy.$$

(a) Encontre a série de Taylor em torno do zero desta função.

Solução:
A derivada de g é

$$g'(x) = \frac{1}{x^2}\operatorname{arctanh}(x^2).$$

Seja $f(y) := \operatorname{arctanh}(y)$. Sua derivada é

$$f'(y) = \frac{1}{1-y^2} = \sum_{m=0}^{\infty} y^{2m},$$

e assim

$$f(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)} y^{2m+1} + C,$$

onde

$$C = f(0) = \operatorname{arctanh}(0) = 0.$$

Segue que

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)} x^{4m+2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)} x^{4m},$$

e assim

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(4m+1)(2m+1)} x^{4m+1} + C.$$

Enfim, como

$$C = g(0) = 0,$$

temos

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(4m+1)(2m+1)} x^{4m+1}.$$

(b) Determine $g^{(15)}(0)$ (a décima-quinta derivada da função g em $x = 0$).

Solução:
Pelo Teorema de Taylor,

$$g^{(15)}(0) = 15! a_{15},$$

onde a_{15} é o coeficiente de x^{15} na série de Taylor de g em torno de 0. Como este coeficiente é igual a zero, temos

$$g^{(15)}(0) = 0.$$

Questão 3: (2.5 pontos)
Considere a seguinte EDO.

$$(x^2 - 2x + 2)y'' + (x - 1)y' + (x^2 - 2x + 1)y = 0.$$

(a) Mostre que $x_0 = 1$ é ponto ordinário desta equação.

Solução:
A equação é

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^2 + 1, \\ Q(x) &= (x-1), \text{ e} \\ R(x) &= (x-1)^2. \end{aligned}$$

Como $P(1) = 1 \neq 0$, $x_0 = 1$ é ponto ordinário desta equação.

(b) Determine a relação de recorrência da solução em séries desta equação em torno deste ponto.

Solução:
Substituindo $t = (x - 1)$, temos

$$(t^2 + 1)y'' + ty' + t^2 y = 0.$$

A solução é

$$\begin{aligned} y &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m \\ \therefore \quad y' &= \sum_{m=1}^{\infty} m a_m t^{m-1} \\ \therefore \quad y'' &= \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m t^{m-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação, temos

$$\begin{aligned} (t^2+1)\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m t^{m-2} + t\sum_{m=1}^{\infty} m a_m t^{m-1} + t^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m &= 0 \\ \therefore \quad \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m t^m + \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m t^{m-2} + \sum_{m=1}^{\infty} m a_m t^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{m+2} &= 0 \\ \therefore \quad \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m t^m + \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2} t^m + \sum_{m=1}^{\infty} m a_m t^m + \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} t^m &= 0 \\ \therefore \quad \sum_{m=2}^{\infty} \left[(m+2)(m+1)a_{m+2} + m^2 a_m + a_{m-2}\right] t^m + (6a_3 + a_1)t + 2a_2 &= 0. \end{aligned}$$

A relação de recorrência é então

$$\begin{aligned} a_2 &= 0, \\ a_3 &= -\frac{1}{6}a_2, \text{ e} \\ a_{m+2} &= -\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}a_m - \frac{1}{(m+1)(m+2)}a_{m-2} \ \forall \ m \geq 2. \end{aligned}$$

(c) Determine os primeiros 3 coeficientes não nulos da solução que satisfaz $y(1) = 0$ e $y'(1) = 1$.

Solução:
Pelo Teorema de Taylor,

$$a_0 = y(0) = 0, \ a_1 = y'(1) = 1.$$

Logo

$$\begin{aligned} a_2 &= 0, \\ a_3 &= -\frac{1}{6}a_1 = -\frac{1}{6}, \\ a_4 &= -\frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{12}a_0 = 0, \text{ e} \\ a_5 &= -\frac{9}{20}a_3 - \frac{1}{20}a_1 = \frac{1}{40}. \end{aligned}$$

Questão 4: (2.5 pontos)
Determine a solução $u(x,t)$ do problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in]0,20[\times]0,\infty[\\ u(0,t) = 100 & t \in]0,\infty[\\ u(20,t) = 200 & t \in]0,\infty[\\ u(x,0) = f(x) & x \in]0,20[\end{cases}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} 100 & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ 150 & \text{se } 5 \leq x < 15 \\ 200 & \text{se } 15 \leq x \leq 20. \end{cases}$$

Solução:
O problema estacionário é

$$\begin{cases} v_{xx} & = 0, \ x \in]0,20[\\ v(0) & = 100, \ \text{e} \\ v(20) & = 200. \end{cases}$$

A solução geral desta EDO é

$$v(x) = Ax + B$$

Aplicando as condições de contorno, temos $A = 5$ e $B = 100$. Assim

$$v(x) = 5x + 100$$

A diferença $w := u - v$ satisfaz

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 & (x,t) \in]0,20[\times]0,\infty[\\ w(0,t) = 0 & t \in]0,\infty[\\ w(20,t) = 0 & t \in]0,\infty[\end{cases}$$

Procuramos primeiro as soluções separáveis deste problema. Seja $w(x,t) = X(x)T(t)$. Substituindo na EDP, temos

$$\begin{aligned} & X(x)T'(y) - X''(x)T(t) = 0 \\ \therefore \quad & \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \end{aligned}$$

Como o lado esquerdo é constante em x e como o lado direito é constante em t, os dois são iguais a uma constante λ, isto é

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Assim

$$\begin{aligned} X''(x) &= \lambda X(x), \ \text{e} \\ T'(t) &= \lambda T(t). \end{aligned}$$

Substituindo nas condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} & X(0)T(t) = 0, \ \forall\ t \\ \therefore \quad & X(0) = 0, \ \text{e} \\ & X(20)T(t) = 0, \ \forall\ t \\ \therefore \quad & X(20) = 0. \end{aligned}$$

Os autovalores e as autofunções do problema $X'' = \lambda X$ com os condições de contorno $X(0) = X(20) = 0$ são

$$\lambda_m = \frac{-m^2\pi^2}{400}, \text{ e}$$
$$X_m = \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right),$$

onde $m \in \{1, 2, ...\}$. Substituindo na equação para T, temos, para todo m,

$$T'_m = \frac{-m^2\pi^2}{400} T_m$$
$$\therefore \quad T_m = b_m e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{400}}.$$

As soluções separáveis são então

$$w_m(x,t) = b_m \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right) e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{400}},$$

onde $m \in \{1, 2, ...\}$. Pelo princípio de superposição, a solução geral do problema homogêneo é

$$w(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right) e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{400}}.$$

Substituindo nas condições inciais, temos

$$f(x) - v(x) = w(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right).$$

Pelas equações de Euler-Fourier, temos, para todo m,

$$
\begin{aligned}
b_m &= \frac{1}{10}\int_0^{20}(f(x)-v(x))\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)dx \\
&= -\frac{1}{10}\int_0^{5} 5x\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)dx + \frac{1}{10}\int_5^{15}(50-5x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)dx \\
&\qquad + \frac{1}{10}\int_{15}^{20}(100-5x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)dx \\
&= \frac{10}{m\pi}\left[x\cos\left(\frac{m\pi x}{20}\right)\right]_0^5 - \frac{10}{m\pi}\int_0^5 \cos\left(\frac{m\pi x}{20}\right)dx \\
&\quad + \frac{10}{m\pi}\left[(x-10)\cos\left(\frac{m\pi x}{20}\right)\right]_5^{15} - \frac{10}{m\pi}\int_5^{15} \cos\left(\frac{m\pi x}{20}\right)dx \\
&\qquad + \frac{10}{m\pi}\left[(x-20)\cos\left(\frac{m\pi x}{20}\right)\right]_{15}^{20} - \frac{10}{m\pi}\int_{15}^{20} \cos\left(\frac{m\pi x}{20}\right)dx \\
&= \frac{100}{m\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \frac{100}{m\pi}\cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right) - \frac{200}{m^2\pi^2}\left[\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)\right]_0^{20} \\
&= \frac{100}{m\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \frac{100}{m\pi}\cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right) \\
&= \frac{200}{m\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right).
\end{aligned}
$$

Segue que

$$
u(x) = 100 + 5x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{200}{m\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{400}}.
$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A : O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -m^2\pi^2/L^2$**,** $m \in \{1, 2, 3, ...\}$**, e as autofunções correspondentes são**

$$\left\{ y_m(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right),\ m \geq 1. \right.$$