TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (2.5 pontos)

Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{m^2}\right)$,

(b) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sqrt{\frac{1+m^2}{1+m^4}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)\big(\log_e(m+1)\big)^2}$.

Questão 2: (2.5 pontos)

Considere a seguinte função

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{y^2}\operatorname{arctanh}(y^2)dy.$$

(a) Encontre a série de Taylor em torno do zero desta função.

(b) Determine $g^{(15)}(0)$ (a décima-quinta derivada da função g em $x=0$).

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere a seguinte EDO.

$$(x^2-2x+2)y'' + (x-1)y' + (x^2-2x+1)y = 0.$$

(a) Mostre que $x_0 = 1$ é ponto ordinário desta equação.

(b) Determine a relação de recorrência da solução em séries desta equação em torno deste ponto.

(c) Determine os primeiros 3 coeficientes não nulos da solução que satisfaz $y(1)=0$ e $y'(1)=1$.

Questão 4: (2.5 pontos)

Determine a solução $u(x,t)$ do problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in]0,20[\times]0,\infty[\\ u(0,t) = 100 & t \in]0,\infty[\\ u(20,t) = 200 & t \in]0,\infty[\\ u(x,0) = f(x) & x \in]0,20[\end{cases}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} 100 & \text{se } 0 \le x < 5 \\ 150 & \text{se } 5 \le x < 15 \\ 200 & \text{se } 15 \le x \le 20. \end{cases}$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A : O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -m^2\pi^2/L^2$**,** $m \in \{1, 2, 3, ...\}$**, e as autofunções correspondentes são**

$$\left\{ y_m(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \; m \geq 1. \right.$$