Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral IV - MAC248
Gabarito seg. prova unificada - Escola Politécnica / Escola de Química - 3/7/2018

TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (2.5 pontos)

Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m^3}{m^5+1}$.

Solução:
A série de valores absolutos é

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^3}{m^5+1}.$$

Aplicamos o teste de comparação no limite, comparando essa série com a p-série com $p = 2$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Temos

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m^3}{m^5+1} / \frac{1}{m^2} = \lim_{m\to\infty} \frac{m^5}{m^5+1} = 1.$$

Como a p-série com $p = 2$ é convergente, segue pelo teste de comparação no limite que essa série é absolutamente convergente.

(b) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m^2}{2^m}$.

Solução:
A série de valores absolutos é

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{2^m}.$$

Aplicando o teste de razão a essa série, temos

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)^2}{2^{m+1}} / \frac{2^m}{m^2} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Segue pelo teste de razão que essa série é absolutamente convergente.

(c) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \operatorname{sen}\left(\frac{(-1)^m}{\sqrt{m}}\right)$.

Solução:
A série é

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}\big((-1)^m m^{-\frac{1}{2}}\big) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m m^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}\big(m^{-\frac{1}{2}}\big).$$

Aplicamos primeiro o teste da série alternada. Seja $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ a função

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}\big(x^{-\frac{1}{2}}\big).$$

Como as funções $x \mapsto \mathrm{sen}(x^{-\frac{1}{2}})$ e $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}$ são decrescentes para $x \in [0,\infty[$, a função f também é decrescente. Como

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

segue pelo teste de série alternada que essa série é convergente.

A série de valores absolutos é

$$\sum_{m=1}^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}\big(m^{-\frac{1}{2}}\big).$$

Aplicamos o teste de comparação no limite, comparando essa série com a série harmonica

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}.$$

Temos

$$\lim_{m\to\infty} m^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}\big(m^{-\frac{1}{2}}\big)/m^{-1} = \lim_{m\to\infty} m^{\frac{1}{2}}\mathrm{sen}\big(m^{-\frac{1}{2}}\big) = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = 1.$$

Como a série harmonica é divergente, segue pelo teste de comparação no limite que a série de valores absolutos também é divergente, e essa série é então condicionalmente convergente.

Questão 2: (2.5 pontos)
Seja $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = e^x.$$

(a) Determine a série de Fourier em senos de f.

Solução:
Para determinar a série de Fourier em senos de f, utilizamos a extensão impar $\tilde{f}$ de f. Pelas formulas de Euler-Fourier, temos

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\text{sen}(mx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\text{sen}(mx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^x\text{sen}(mx)dx. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{2}{m\pi}\Big[-\frac{1}{m}e^x\cos(mx)\Big]_0^\pi + \frac{2}{m\pi}\int_0^\pi e^x\cos(mx)dx \\ &= \frac{2\big(1-e^\pi(-1)^m\big)}{m\pi} + \frac{2}{m^2\pi}\big[e^x\text{sen}(mx)\big]_0^\pi - \frac{2}{m^2\pi}\int_0^\pi e^x\text{sen}(mx)dx \\ &= \frac{2\big(1-e^\pi(-1)^m\big)}{m\pi} - \frac{1}{m^2}b_m. \end{aligned}$$

Segue que

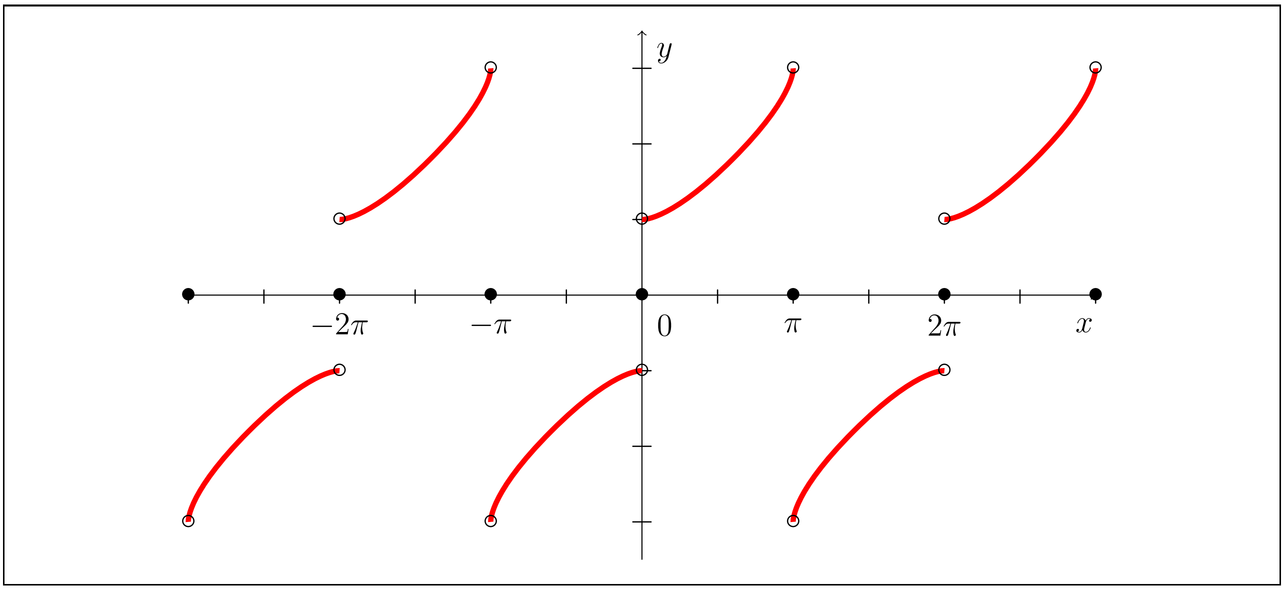
$$\begin{aligned} \left(\frac{1+m^2}{m^2}\right)b_m &= \frac{2\big(1-e^\pi(-1)^m\big)}{m\pi} \\ \therefore \quad b_m &= \frac{2m\big(1-e^\pi(-1)^m\big)}{\pi(1+m^2)}. \end{aligned}$$

A série de Fourier em senos de f é então

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m\big(1-e^\pi(-1)^m\big)}{\pi(1+m^2)}\text{sen}(mx).$$

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

Solução:



(c) Calcule o valor da série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(2m+1)}{1+(2m+1)^2}.$$

Solução:
Como f é continua em $x = \pi/2$, segue pelo teorema de convergência de Fourier que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m\big(1-e^{\pi}(-1)^m\big)}{\pi(1+m^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Como $\operatorname{sen}(m\pi/2) = 0$ para m par, apenas os termos impares nesse somatorio são diferentes de zéro. Substituindo $m = 2n+1$, obtemos então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)\big(1+e^{\pi}\big)}{\pi(1+(2n+1)^2)} \operatorname{sen}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{1+(2n+1)^2} \cos(n\pi) = \frac{\pi e^{\frac{\pi}{2}}}{2(1+e^{\pi})}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{1+(2n+1)^2} = \frac{\pi}{4}\frac{2}{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}} = \frac{\pi}{4\cosh(\pi/2)}.$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do seguinte problema de valor inicial

$$y'' + 4y = \begin{cases} x \text{ se } 0 \leq x < 1, \\ 0 \text{ se } 1 \leq x < \infty, \end{cases} \qquad y(0) = 0, \ y'(0) = 0.$$

Solução:

Seja $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ o lado direito dessa equação, isto é

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ se } 0 \leq x < 1, \\ 0 \text{ se } 1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Temos

$$f(x) = x - xu_1(x) = x - (x-1)u_1(x) - u_1(x),$$

onde u_1 é a função degrau unitária com singularidade em $x = 1$. Aplicando a transformada de Laplace aos dois lados da equação,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' + 4y] &= \mathcal{L}[f] \\ \therefore \qquad \mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}[x - (x-1)u_1(x) - u_1(x)] \\ \therefore \quad s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Aplicando as condições de contorno, temos então

$$\begin{aligned} (s^2+4)\mathcal{L}[y] &= \frac{(1-e^{-s})}{s^2} - \frac{1}{s}. \\ \therefore \qquad \mathcal{L}[y] &= \frac{(1-e^{-s})}{s^2(s^2+4)} - \frac{1}{s(s^2+4)}. \end{aligned}$$

Determinamos g e h tais que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g] &= \frac{1}{s^2}s^2 + 4 \\ \mathcal{L}[h] &= \frac{1}{s(s^2+4)}. \end{aligned}$$

Aplicando a técnica de frações parciais, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g] &= -\frac{1}{4s^2} + \frac{1}{4(s^2+4)} \\ &= \mathcal{L}\left[-\frac{x}{4} + \frac{1}{8}\text{sen}(2x) \right] \\ \therefore \quad g \quad &= -\frac{x}{4} + \frac{1}{8}\text{sen}(2x). \end{aligned}$$

Da mesma maneira, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[h] &= \frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2+4)}\\ &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2x)\right]\\ \therefore \quad h &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2x).\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}[g] - e^{-s}\mathcal{L}[g] - \mathcal{L}[h]\\ \therefore \quad y(x) &= g(x) - u_1(x)g(x-1) - h(x).\end{aligned}$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Determine a solução $u(x,t)$ do problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in]0,20[,\ t \in]0,\infty[,\\ u(0,t) = 100,\ u(20,t) = 0 & t \in [0,\infty[,\\ u(x,0) = g(x) & x \in [0,20], \end{cases}$$

onde

$$g(x) = \begin{cases} 100 \text{ se } 0 \le x < 10,\\ 0 \text{ se } 10 \le x \le 20. \end{cases}$$

Solução:

A solução $\hat{u}$ do problema estacionario

$$\begin{cases} \hat{u}_{xx} = 0,\\ \hat{u}(0) = 100,\ \hat{u}(2) = 0 \end{cases}$$

é

$$\hat{u}(x) = 100 - 5x.$$

Seja $v = u - \hat{u}$. Essa função é solução do problema

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 & x \in]0,20[,\ t \in]0,\infty[,\\ v(0,t) = 0,\ v(20,t) = 0 & t \in [0,\infty[,\\ v(x,0) = g(x) - \hat{u}(x) & x \in [0,20]. \end{cases}$$

Determinamos primeiro o problema separado. Substituindo $v(x,t) := X(x)T(t)$ na equação a derivadas parciais, temos

$$\begin{aligned} & (XT)_t - (XT)_{xx} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & XT' - X''T = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} \end{aligned}$$

Como o lado esquerdo é constante em t e como o lado direito é constante em x, os dois são iguais à mesma constante λ. Assim

$$\begin{aligned} X'' &= \lambda X, \\ T' &= \lambda T. \end{aligned}$$

Substituindo nas condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} & X(0)T(t) = 0\ \forall t \\ \Rightarrow\quad & X(0) = 0. \\ & X(20)T(t) = 0\ \forall t \\ \Rightarrow\quad & X(20) = 0. \end{aligned}$$

Os autovalores e as autofunções do problema

$$\begin{aligned} & X'' = \lambda X, \\ & X(0) = X(20) = 0. \end{aligned}$$

são

$$\begin{aligned} \lambda_m &= -\frac{m^2\pi^2}{400} \\ X_m(x) &= \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right), \end{aligned}$$

para $m \in \{1, 2, 3, \cdots\}$. Substituindo λ_m na equação para T, temos

$$\begin{aligned} & T_m'(t) = -\frac{m^2\pi^2}{400} T_m(t) \\ \therefore\quad & T_m(t) = b_m e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{400}}. \end{aligned}$$

As soluções separáveis são então

$$v_m(x,t) = b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right) e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{400}}.$$

Segue pelo princípio de superposição que a solução geral do problema homogênea é

$$v(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right) e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{400}}.$$

Substituindo nas condições iniciais, temos

$$g(x) - \hat{u}(x) = v(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right).$$

Como essa série é uma série de Fourier em senos, utilizamos a extensão ímpar f de $(g - \hat{u}_\infty)$. Pelas fórmulas de Euler-Fourier temos então

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{1}{20}\int_{-20}^{20} f(x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)dx \\
&= \frac{1}{10}\int_{0}^{20} (g(x) - \hat{u}(x))\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)dx \\
&= \int_0^{10} \frac{5x}{20}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)dx + \int_{10}^{20} \frac{(100-5x)}{20}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)dx \\
&= \left[-\frac{10x}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{20}\right)\right]_0^{10} + \int_0^{10} \frac{10}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{20}\right)dx \\
&\quad + \left[-\frac{10(20-x)}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{20}\right)\right]_{10}^{20} - \int_{10}^{20} \frac{10}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{20}\right)dx \\
&= \left[\frac{200}{m^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)\right]_0^{10} - \left[\frac{200}{m^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)\right]_{10}^{20} \\
&= \frac{400}{m^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Segue que

$$v(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{400}{m^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right) e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{400}},$$

e

$$u(x,y) = 100 - 5x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{400}{m^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right) e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{400}}.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A : O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -m^2\pi^2/L^2$**,** $m \in \{1, 2, 3, ...\}$**, e as autofunções correspondentes são**

$$y_m(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right),\ m \geq 1.$$

B - Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s > 0$
$t^m\ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
$t^m e^{at}\ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s > a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$