TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (2.5 pontos)

Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m^3}{m^5+1}$.

(b) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m^2}{2^m}$.

(c) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \operatorname{sen}\left(\frac{(-1)^m}{\sqrt{m}}\right)$.

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = e^x.$$

(a) Determine a série de Fourier em senos de f.

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

(c) Calcule o valor da série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(2m+1)}{1+(2m+1)^2}.$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do seguinte problema de valor inicial

$$y'' + 4y = \begin{cases} x \text{ se } 0 \le x < 1, \\ 0 \text{ se } 1 \le x < \infty, \end{cases} \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Determine a solução $u(x,t)$ do problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in]0,20[,\ t \in]0,\infty[, \\ u(0,t) = 100,\ u(20,t) = 0 & t \in [0,\infty[, \\ u(x,0) = g(x) & x \in [0,20], \end{cases}$$

onde

$$g(x) = \begin{cases} 100 \text{ se } 0 \le x < 10, \\ 0 \text{ se } 10 \le x \le 20. \end{cases}$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A : O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -m^2\pi^2/L^2$, $m \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_m(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \ m \geq 1.$$

B - Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s}, \ s > 0$
$t^m \ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}}, \ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \ s > a$
$t^m e^{at} \ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, \ s > a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \ s > \lvert a\rvert$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$