UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Prova Final Unificada de Cálculo IV - 2017/1, 20/06/2017

Questão 1: Considere a equação

$$y'' - xy' - y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é ponto regular dessa equação.

(b) Determine a relação de recorrência dos coeficientes da solução em série dessa equação em torno do ponto $x = 0$.

(c) Determine os primeiros quatro termos não nulos da solução $y(x)$ que satisfaz $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$.

Questão 2: Encontre γ de modo que a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2y = 0, \\ y(1) = 1,\ y'(1) = \gamma, \end{cases}$$

tende a zero quando x tende a zero.

Questão 3: Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \cos(t)\, u_\pi(t) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1, \end{cases}$$

onde u_π é a função degrau unitário com descontinuidade em $t = \pi$.

Questão 4: Encontra a solução $u : [0, 10] \times [0, 10] \to \mathbb{R}$ do seguinte problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = u & (x, y) \in (0, 10) \times (0, 10) \\ u(x, 0) = 0,\ u(x, 10) = 0 & x \in [0, 10] \\ u(0, y) = f(y),\ u(10, y) = 0 & y \in [0, 10], \end{cases}$$

onde $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$f(t) = \begin{cases} t \text{ se } 0 \le t < 5 \\ 10 - t \text{ se } 5 \le t \le 10. \end{cases}$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A: O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ n \geq 1.$$

B: **Transformadas de Laplace elementares.**

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s}, \ s > 0$
$t^m \ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}}, \ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \ s > a$
$t^m e^{at} \ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, \ s > a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$e^{at}\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \ s > \lvert a\rvert$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$