



**Prova Final Unificada de Cálculo IV- 2016/2, 13/12/2016**

**Questão 1:** (2.5 pontos) Determine se as séries a seguir são divergentes, condicionalmente convergentes ou absolutamente convergentes:

(a) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen}(n)}{n^3}$$

(b) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n^2}}{(n!)^2}$$

(c) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n + 3n \cos^2(n)}$$

**Questão 2:** (2.5 pontos) Considere a equação:  $2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$ .

- (a) Mostre que  $x = 0$  é ponto singular regular.
- (b) Determine as raízes da equação indicial no ponto  $x = 0$ .
- (c) Determine a relação de recorrência para os coeficientes da série de potências em torno de  $x = 0$  da solução  $y(x)$  que corresponde à maior raiz da equação indicial.

**Questão 3:** (2.5 pontos) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = \cos(t)u_{\pi}(t), \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \end{cases}$$

onde  $u_{\pi}$  é a função degrau unitário com singularidade em  $\pi$ .

**Questão 4:** (2.5 pontos) Seja  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

- (a) Determine a série de Fourier em senos de  $f$ .
- (b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo  $[-6, 6]$ .

**Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.**

**FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!**

**A: O problema**

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores  $\lambda = -n^2\pi^2/L^2$ ,  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ , e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \geq 1.$$

**B: Transformadas de Laplace elementares.**

$f$	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^m \quad (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}}, \quad s > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$t^m e^{at} \quad (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, \quad s > a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\text{cos}(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$e^{at}\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
$e^{at}\text{cos}(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s >  a $
$\text{cosh}(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s >  a $
$\delta(t-a)$	$e^{-as}$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - \dots - f^{(m-1)}(0)$