TEMPO DE PROVA: 2h

Questão 1: (2.5 pontos)

Considere a série de potências:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m (x-1)^{m+1}}{m\sqrt{m^2+1}}.$$

(a) Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência dessa série.

(b) Encontre $f^{(10)}(1)$, isto é, a derivada de ordem 10 da função f em $x = 1$.

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } -2 \leq x < -1, \\ x \text{ se } -1 \leq x < 1, \text{ e} \\ 0 \text{ se } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier de f.

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo $[-6, 6]$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere a equação de Chebyshev:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 1$ é ponto singular regular.

(b) Determine as raízes da equação indicial no ponto $x = 1$.

(c) Determine a fórmula de recorrência para os coeficientes da série de potências em torno de $x = 1$ da solução $y(x)$ que corresponde à *maior* das duas raízes da equação indicial.

(d) Determine os 3 primeiros termos não nulos da solução $y(x)$ encontrada no item (c) e que, além disso, satisfaz $\lim_{x \to 1^+} y(x)/\sqrt{x-1} = 1$.

Questão 4: (2.5 pontos)

Resolva o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \text{sen}(t) + \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \\ y(0) = 1, \; y'(0) = 0. \end{cases}$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A : Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$t^m e^{at}\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s>a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-...-f^{(m-1)}(0)$