TEMPO DE PROVA: 2h

Questão 1: (2.5 pontos)
Considere a equação diferencial

$$y'' - y - (x+1)e^{x+1} = 0.$$

(a) [0.5] Mostre que $x = -1$ é um ponto ordinário para a equação.

(b) [2.0] Encontre a fórmula de recorrência para os coeficientes da solução em série de potências centrada em $x = -1$, usando a fórmula de Taylor para a exponencial:

$$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}.$$

Solução:

1. Os coeficientes são funcões analíticas em todo $\mathbb{R}$, então -1 é um ponto ordinário.

2. Substituindo $t = x + 1$, temos

$$y'' - y - te^t = 0.$$

Se y tem série de Taylor

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

então as derivadas são

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^{n-1}, \tag{1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)t^{n-2}. \tag{2}$$

Substituindo na equação, temos então:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} = 0,$$

e igualando os indices das séries:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} = 0.$$

Igualando os coeficientes obtemos que para $n \geq 1$:

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n - \frac{1}{(n-1)!} = 0,$$

e para $n = 0$:

$$a_2 \cdot 2 - a_0 = 0.$$

Assim,

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{(n-1)! \cdot (n+2)(n+1)}$$

para todo $n \geq 1$, e

$$a_2 = \frac{a_0}{2}.$$

Os coeficientes da série de potências em x centrada em 1 são os mesmos e satisfazem a mesma recurreência.

3. Como os coeficientes são funcões analíticas em todo $\mathbb{R}$ (isto é são dados por séries de Taylor com raio de convergência infinito), as soluções também são dado por séries de Taylor com raio de convergência infinito e são definidas em todo $\mathbb{R}$.

4. Como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n,$$

deve valer que $a_4 = \frac{f^{(4)}}{4!}$, isto é, $f^{(4)} = a_4 \cdot 4!$.

Usarando a recurrência para $n = 0$ e $n = 2$ obtemos

$$a_2 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}.$$

e

$$a_4 = \frac{a_2}{4 \cdot 3} + \frac{1}{1! \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{24} + \frac{1}{12} = \frac{1}{8}.$$

Então $f^{(4)} = \frac{1}{8} \cdot 4! = 3$

Questão 2: (2.5 pontos)

Considere a série de potências:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x-2)^m}{3^m\sqrt{m+1}}.$$

Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência dessa série.

Encontre $f^{(5)}(2)$ (a derivada de ordem 5 da função f em $x = 2$).

Solução:

Essa série é uma série de Taylor em torno de 2. O m-esimo termo é

$$a_m = \frac{(x-2)^m}{3^m\sqrt{m+1}}.$$

Para todo m,

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{(x-2)}{3}\frac{\sqrt{m+2}}{\sqrt{m+1}}.$$

Então

$$\lim_{m\to+\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \frac{|x-2|}{3}.$$

Segue pelo teste de razão que a série é absolutamente convergente para $|x-2| < 3$ e divergente para $|x-2| > 3$, e o raio de convergência então é 3.

Para determinar o intervalo de convergência, temos que estudar a convergência da série as duas extremidades. Quando $x = -1$,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{m+1}},$$

que é convergente pelo teste de série alternada. Quando $x = 5$,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1/2},$$

que é divergente pois é uma p-série com $p = -1/2 > -1$. Segue que o intervalo de convergência é $[-1, 5)$.
Finalmente, pelo teorema de Taylor,

$$f^{(5)}(2) = 5! a_m = \frac{120}{3^5\sqrt{6}} = \frac{40}{81\sqrt{6}}.$$

Questão 3: (2.5 pontos)
Encontre a solução $u : [0, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ da equação diferencial com condições de contorno abaixo:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = u, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u(x, 0) = 0,\ u(x, \pi) = x(\pi - x), & x \in [0, \pi] \\ u(0, y) = 0,\ u(\pi, y) = 0, & y \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Solução:
Por separação de variáveis $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Substituindo na equaç ão, temos

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y'' - Y}{Y} = \lambda\ (constante).$$

junto com as condições de contorno homogéneas $X(0) = X(\pi) = Y(0) = 0$. Resolvendo o problema em $X(x)$ concluimos que

$$X_n(x) = c_n \sin(nx),\ \ com\ \ \lambda = -n^2\ (n = 1, 2, 3...).$$

Substituindo o valor de λ temos o problema em Y seguinte

$$Y'' - (1 + n^2)Y = 0,\ Y(0) = 0.$$

Resolvendo deduzimos que

$$Y_n(y) = d_n \sinh(\sqrt{1 + n^2} y).$$

Assim, a soluç ão procurada é da forma de série

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(\sqrt{1 + n^2} y) \sin(nx),$$

com

$$A_n \sinh(\sqrt{1+n^2}\pi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)dx = \begin{cases} 0 \quad , & n \textit{ par} \\ \dfrac{8}{n^3\pi}, & n \textit{ impar.} \end{cases}$$

isto é

$$A_n \sinh(\sqrt{1+n^2}\pi) = \begin{cases} 0 \quad , & n \textit{ par} \\ \dfrac{8}{n^3\pi}, & n \textit{ impar.} \end{cases}$$

Finalmente a solução $u(x,y)$ é da forma

$$u(x,y) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sinh(\sqrt{1+(2k+1)^2}y)\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3\sinh(\sqrt{1+(2k+1)^2}\pi)}.$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y = g(t) \\ y(0) = 2, y'(0) = 1 \end{cases}$$

onde $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função

$$g(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 1, & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Solução:

A função $g(t)$ pode ser escrita como

$$g(t) = t - (t-1)u_1(t) = t - f(t-1)u_1(t),$$

onde $f(t) = t$. Sua transformada de Laplace é:

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1 - \mathrm{e}^{-s}}{s^2}$$

Aplicando a transformada na equação diferencial, temos

$$\begin{aligned}(s^2+4)\mathcal{L}[y] = \frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s^2} + 2s + 1 \Rightarrow \mathcal{L}[y] &= (1-\mathrm{e}^{-s})\frac{1}{s^2(s^2+4)} + 2\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4} \\ &= (1-\mathrm{e}^{-s})\frac{1}{s^2(s^2+4)} + \mathcal{L}[2\cos(2t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)].\end{aligned}$$

Usando que

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{4s^2} - \frac{1}{4(s^2+4)} = \mathcal{L}\left[\frac{t}{4} - \frac{\sin(2t)}{8}\right]$$

e a fórmula $\mathrm{e}^{-at}\mathcal{L}[h(t)] = \mathcal{L}[u_a(t)h(t-a)]$, obtemos que

$$y(t) = \frac{t}{4} - \frac{\sin(2t)}{8} - u_1(t)\left(\frac{t-1}{4} - \frac{\sin(2(t-1))}{8}\right) + 2\cos(2t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)$$