TEMPO DE PROVA: 2h

Questão 1: (2.5 pontos)

Considere a equação diferencial

$$y'' - y - (x+1)e^{x+1} = 0.$$

(a) [0.5] Mostre que $x = -1$ é um ponto ordinário para a equação.

(b) [2.0] Encontre a fórmula de recorrência para os coeficientes da solução em série de potências centrada em $x = -1$, usando a fórmula de Taylor para a exponencial:

$$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}.$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Considere a função

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x-2)^m}{3^m\sqrt{m+1}}.$$

(a) [2.0] Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série de potências que define $f(x)$.

(b) [0.5] Encontre $f^{(5)}(2)$ (a derivada de ordem 5 da função f em $x = 2$).

Questão 3: (2.5 pontos)

Encontre a solução $u : [0,\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ da equação diferencial com condições de contorno abaixo:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = u, & (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi) \\ u(x,0) = 0,\ u(x,\pi) = x(\pi - x), & x \in [0,\pi] \\ u(0,y) = 0,\ u(\pi,y) = 0, & y \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y = g(t) \\ y(0) = 2, y'(0) = 1 \end{cases}$$

onde $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ a função

$$g(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \le t < 1 \\ 1, & \text{se } t \ge 1. \end{cases}$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>0$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>0$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-\ldots-f^{(m-1)}(0)$

Integrais úteis.

$$\int x^m\cos(\alpha x)dx=\frac{x^m}{\alpha}\text{sen}(\alpha x)-\frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\text{sen}(\alpha x)dx$$
$$\int x^m\text{sen}(\alpha x)dx=-\frac{x^m}{\alpha}\cos(\alpha x)+\frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\cos(\alpha x)dx$$

O problema

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=0, y(L)=0 \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda=n^2\pi^2/L^2$, $n\in\mathbb{N}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x)=\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

 Boa prova!