



Prova Final Unificada de Cálculo IV - 2025/2, 28/11/2025

Questão 1:(2,5 pontos) Considere a função $f(x)$ definida pela série de potências

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{4^n (2n)!} x^{2n+1}.$$

- (a) Calcule o raio de convergência da série que define $f(x)$.
- (b) Calcule $f^{(5)}(0)$ e $f^{(6)}(0)$.

Questão 2:(2,5 pontos) Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

- (a) Encontre a série de Fourier em senos de período 4 de f .
- (b) Esboce o gráfico da função para a qual a série converge no intervalo $[-6, 6]$.

Questão 3:(2,5 pontos) Considere um sistema massa-mola com amortecimento, inicialmente em repouso, modelado pela equação diferencial abaixo. No instante $t = \pi$, o sistema recebe uma força impulsiva unitária, representada pela função delta de Dirac $\delta(t - \pi)$. Resolva o seguinte problema de valor inicial usando a transformada de Laplace:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \pi \delta(t - \pi), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Questão 4:(2,5 pontos) Usando o método de separação de variáveis e justificando todas as etapas, determine a solução do problema:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, & 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x), & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

**Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!**

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^m \quad (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$t^m e^{at} \quad (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, \quad s > a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$e^{at} \text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as} \mathcal{L}[f](s)$
$e^{at} f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m \mathcal{L}[f](s) - s^{m-1} f(0) - \dots - f^{(m-1)}(0)$

A. O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2 \pi^2 / L^2$, $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right).$$