TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (3 pontos)

Dada a função

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1, \text{ e} \\ (x-2)^2 & \text{se } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier em cossenos de f.

Solução:

Pelas fórmulas de Euler–Fourier para séries de Fourier em cossenos

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx \\ &= \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (x-2)^2dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^2 \\ &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

e

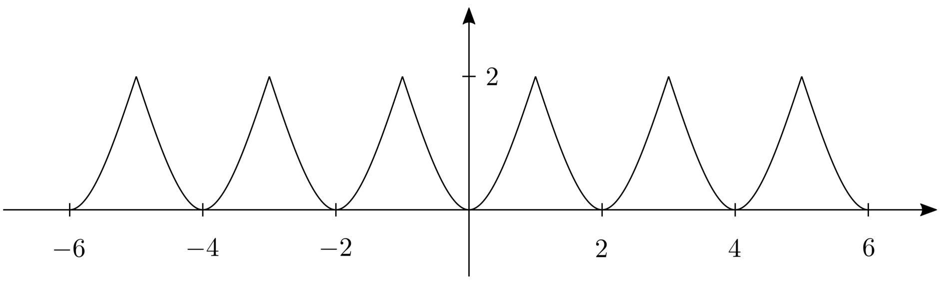
$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &= \int_0^1 x^2\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx + \int_1^2 (x-2)^2\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &= \left[\frac{2x^2}{m\pi}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^1 - \frac{4}{m\pi}\int_0^1 x\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &\quad + \left[\frac{2(x-2)^2}{m\pi}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_1^2 - \frac{4}{m\pi}\int_1^2 (x-2)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &= \left[\frac{8x}{m^2\pi^2}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^1 - \frac{8}{m^2\pi^2}\int_0^1 \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &\quad + \left[\frac{8(x-2)}{m^2\pi^2}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_1^2 - \frac{8}{m^2\pi^2}\int_1^2 \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &= \frac{16}{m^2\pi^2}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \frac{8}{m^2\pi^2}\int_0^2 \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &= \frac{16}{m^2\pi^2}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \left[\frac{16}{m^3\pi^3}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^2 \\ &= \frac{16}{m^2\pi^2}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Segue que

$$f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{16}{m^2\pi^2}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right).$$

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no Item (a) no intervalo $[-6, 6]$.

Solução:



(c) Calcule a soma da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Solução:
Pelo teorema de convergência de Fourier,

$$1 = f(1) = \frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{16}{m^2\pi^2}\cos^2\left(\frac{m\pi}{2}\right) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{(2n)^2\pi^2}\cos\left(\frac{(2n)\pi}{2}\right)^2.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} &= \frac{2}{3} \\ \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Questão 2: (3 pontos)

Encontre a solução $u : [0,10] \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$ do problema

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} + \frac{1}{5}u_t & 0 < x < 10,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(10,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < 10,\ \text{e} \\ u_t(x,0) = f(x) & 0 < x < 10, \end{cases}$$

onde

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 5,\ \text{e} \\ 10 - x & \text{se } 5 < x \leqslant 10. \end{cases}$$

Solução:

Determinamos em primeiro lugar as soluções separáveis da parte homogênea do problema. Substituindo $u(x,t) =: X(x)T(t)$ na equação a derivadas parciais, obtemos

$$\begin{aligned} & (XT)_{xx} && = (XT)_{tt} + \frac{1}{5}(XT)_t \\ \Rightarrow\ & X''T && = XT'' + \frac{1}{5}XT' \\ \Rightarrow\ & \frac{X''}{X} && = \frac{T''}{T} + \frac{1}{5}\frac{T'}{T}. \end{aligned}$$

Como o lado esquerdo da equação é constante em t e o lado direito é constante em x, os dois são iguais à mesma constante λ. Assim

$$X'' = \lambda X,\ \text{e}$$

$$T'' + \frac{1}{5}T' = \lambda T.$$

Substituindo nas condições de contorno, obtemos

$$\begin{aligned} & X(0)T(t) && = 0\ \forall t \\ \Rightarrow\ & X(0) && = 0. \\ & X(10)T(t) && = 0\ \forall t \\ \Rightarrow\ & X(10) && = 0. \end{aligned}$$

Substituindo na condição inicial homogênea, temos

$$\begin{aligned} & X(x)T(0) && = 0\ \forall x \\ \Rightarrow\ & T(0) && = 0. \end{aligned}$$

Os autovalores e autofunções do problema em X são

$$\begin{aligned}\lambda_m &= -\frac{m^2\pi^2}{100}\ m > 0 \text{ inteiro, e}\\ X_m &= \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{10}\right).\end{aligned}$$

Substituindo λ_m na equação para T, temos

$$T_m'' + \frac{1}{5}T_m' + \frac{m^2\pi^2}{100}T_m = 0.$$

Segue que

$$T_m = a_m e^{-\frac{t}{10}}\cos\left(\frac{\sqrt{m^2\pi^2-1}t}{10}\right) + b_m e^{-\frac{t}{10}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{m^2\pi^2-1}t}{10}\right).$$

Substituindo a condição inicial para T, obtemos

$$a_m = T_m(0) = 0.$$

As soluções separáveis da parte homogênea do problema são então

$$u_m(x,t) = X_m(x)T_m(x) = b_m e^{-\frac{t}{10}}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{10}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{m^2\pi^2-1}t}{10}\right).$$

Pelo princípio de superposição, a solução geral da parte homogênea do problema é

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{-\frac{t}{10}}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{10}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{m^2\pi^2-1}t}{10}\right).$$

A derivada desta função com respeito a t é

$$u_t(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{-\frac{t}{10}}\left(-\frac{1}{10}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{m^2\pi^2-1}t}{10}\right) + \frac{\sqrt{m^2\pi^2-1}}{10}\cos\left(\frac{\sqrt{m^2\pi^2-1}t}{10}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{10}\right).$$

Avaliando em $t = 0$, temos

$$f(x) = u_t(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sqrt{m^2\pi^2-1}b_m}{10}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{10}\right).$$

Segue pelas fórmulas de Euler–Fourier para séries de Fourier em senos que

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{m^2\pi^2-1}b_m}{10} &= \frac{2}{10}\int_0^{10} f(x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{10}\right) \\
&= \frac{1}{5}\int_0^5 x\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{10}\right)dx + \frac{1}{5}\int_5^{10}(10-x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{10}\right)dx \\
&= \left[-\frac{2x}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{10}\right)\right]_0^5 + \frac{2}{m\pi}\int_0^5 \cos\left(\frac{m\pi x}{10}\right)dx \\
&\quad + \left[-\frac{2(10-x)}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{10}\right)\right]_5^{10} - \frac{2}{m\pi}\int_5^{10}\cos\left(\frac{m\pi x}{10}\right)dx \\
&= \frac{20}{m^2\pi^2}\left[\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{10}\right)\right]_0^5 - \frac{20}{m^2\pi^2}\left[\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{10}\right)\right]_5^{10} \\
&= \frac{40}{m^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Segue que

$$b_m = \frac{400}{m^2\pi^2\sqrt{m^2\pi^2-1}}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right).$$

A solução é então

$$u(x,t) = e^{-\frac{t}{10}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{400}{m^2\pi^2\sqrt{m^2\pi^2-1}}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{10}\right)\text{sen}\left(\frac{\sqrt{m^2t^2-1}t}{10}\right).$$

Questão 3: (2 pontos)

Determine todos os valores de λ para os quais o seguinte problema de EDO com condições de contorno possui ao menos uma solução não nula

$$\begin{cases} u'' &= \lambda u, \\ u'(0) &= 0, \text{ e} \\ u(4) &= 0. \end{cases}$$

Solução:

Para $\lambda > 0$, a solução geral é

$$\begin{aligned} & u(x) &= A\cosh(\sqrt{\lambda}x) + B\text{senh}(\sqrt{\lambda}x) \\ \Rightarrow \quad & u'(x) &= A\sqrt{\lambda}\text{senh}(\sqrt{\lambda}x) + B\sqrt{\lambda}\cosh(\sqrt{\lambda}x). \end{aligned}$$

Substituindo nas condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} & u'(0) &= 0 \\ \Rightarrow \quad & B\sqrt{\lambda} &= 0 \\ \Rightarrow \quad & B &= 0, \text{ e} \\ & u(4) &= 0 \\ \Rightarrow \quad & A\cosh(4\sqrt{\lambda}) &= 0 \\ \Rightarrow \quad & A &= 0. \end{aligned}$$

Segue que não há soluções não nulas para $\lambda > 0$.

Para $\lambda = 0$, a solução geral é

$$\begin{aligned} & u(x) &= Ax + B \\ \Rightarrow \quad & u'(x) &= A. \end{aligned}$$

Substituindo nas condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} & u'(0) &= 0 \\ \Rightarrow \quad & A &= 0, \text{ e} \\ & u(4) &= 0 \\ \Rightarrow \quad & B &= 0. \end{aligned}$$

Segue que não há soluções não nulas para $\lambda = 0$.

Para $\lambda < 0$, a solução geral é

$$\begin{aligned} & u(x) &= A\cos(\sqrt{|\lambda|}x) + B\text{sen}(\sqrt{|\lambda|}x) \\ \Rightarrow \quad & u'(x) &= -A\sqrt{|\lambda|}\text{sen}(\sqrt{|\lambda|}x) + B\sqrt{|\lambda|}\cos(\sqrt{|\lambda|}x). \end{aligned}$$

Substituindo nas condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} & u'(0) && = 0 \\ \Rightarrow\ & B\sqrt{|\lambda|} && = 0 \\ \Rightarrow\ & B && = 0, \text{ e} \\ & u(4) && = 0 \\ \Rightarrow\ & A\,|\lambda| \cos(4\sqrt{|\lambda|}) && = 0. \end{aligned}$$

Segue que soluções não nulas existem se e somente se

$$\begin{aligned} & \cos(4\sqrt{|\lambda|}) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4\sqrt{|\lambda|} && = \frac{(2m+1)\pi}{2},\ m \geqslant 0 \text{ inteiro} \\ \Leftrightarrow\ & \lambda && = -\frac{(2m+1)^2\pi^2}{64},\ m \geqslant 0 \text{ inteiro.} \end{aligned}$$

Questão 4: (2 pontos)

Encontre todas as soluções não nulas $u(x,y) = X(x)Y(y)$ do problema

$$u_{xy} + u_x + u_y = 0, x, y > 0.$$

Dica: Acrescente u aos dois lados da equação.

Solução:

Substituindo $u(x,y) = X(x)Y(y)$ na equação, temos

$$\begin{aligned}
& (XY)_{xy} + (XY)_x + (XY)_y && = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (XY)_{xy} + (XY)_x + (XY)_y + XY && = XY \\
\Leftrightarrow \quad & X'Y' + X'Y + XY' + 1 && = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{X'}{X}\frac{Y'}{Y} + \frac{X'}{X} + \frac{Y'}{Y} + 1 && = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{X'}{X} + 1\right)\left(\frac{Y'}{Y} + 1\right) && = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{X'}{X} + 1\right) && = \left(\frac{Y'}{Y} + 1\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Como o lado esquerdo é constante em y e o lado direito é constante em x, os dois são iguais à mesma constante $\lambda \neq 0$. Isto é

$$X' + X = \lambda X, \text{ e}$$
$$Y' + Y = \frac{1}{\lambda} Y.$$

No caso em que $\lambda = 1$, temos

$$X' = Y' = 0.$$

Segue que

$$X(x) = a, \text{e } Y(y) = b,$$

e a solução é

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = ab =: c.$$

No caso em que $\lambda \notin \{0, 1\}$, temos

$$X' = (\lambda - 1)X, \text{ e}$$
$$Y' = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)Y.$$

Segue que

$$X(x) = ae^{(\lambda-1)x}, \text{ e}$$
$$Y(y) = be^{(1/\lambda-1)y},$$

e a solução é

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = ce^{(\lambda-1)x}e^{(1/\lambda-1)y}.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A : O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -m^2\pi^2/L^2$**,** $m \in \{1, 2, 3, ...\}$**, e as autofunções correspondentes são**

$$y_m(x) = \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right),\ m \geq 1.$$

B : A EDO com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0$$

possui as seguintes soluções

$$\begin{cases} Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} & \text{se } \Delta > 0, \\ Ae^{r_1 x} + Bxe^{r_1 x} & \text{se } \Delta = 0, \text{ e} \\ Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\text{sen}(\beta x) & \text{se } \Delta < 0, \end{cases}$$

onde $\Delta := b^2 - 4ac$ **é o discriminante da equação**

$$ar^2 + br + c = 0,$$

r_1 **e** r_2 **são as raizes da mesma, e, no caso em que** $\Delta < 0$**,**

$$r_1 =: \alpha + i\beta \text{ e } r_2 =: \alpha - i\beta.$$