Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral IV - MAC248
Segunda prova unificada - Escola Politécnica / Escola de Química - 06/12/2022

TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (3 pontos)
Dada a função

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1, \text{ e} \\ (x-2)^2 & \text{se } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier em cossenos de f.

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no Item (a) no intervalo $[-6, 6]$.

(c) Calcule a soma da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Questão 2: (3 pontos)
Encontre a solução $u : [0, 10] \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ do problema

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} + \frac{1}{5}u_t & 0 < x < 10, \ t > 0, \\ u(0,t) = u(10,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < 10, \text{ e} \\ u_t(x,0) = f(x) & 0 < x < 10, \end{cases}$$

onde

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 5, \text{ e} \\ 10 - x & \text{se } 5 < x \leqslant 10. \end{cases}$$

Questão 3: (2 pontos)
Determine todos os valores de λ para os quais o seguinte problema de EDO com condições de contorno possui ao menos uma solução não nula

$$\begin{cases} u'' & = \lambda u, \\ u'(0) & = 0, \text{ e} \\ u(4) & = 0. \end{cases}$$

Questão 4: (2 pontos)
Encontre todas as soluções não nulas $u(x, y) = X(x)Y(y)$ do problema

$$u_{xy} + u_x + u_y = 0, x, y > 0.$$

Dica: Acrescente u aos dois lados da equação.

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A : O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -m^2\pi^2/L^2$**,** $m \in \{1, 2, 3, ...\}$**, e as autofunções correspondentes são**

$$y_m(x) = \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right),\ m \geq 1.$$

B : A EDO com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0$$

possui as seguintes soluções

$$\begin{cases} Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} & \text{se } \Delta > 0, \\ Ae^{r_1 x} + Bxe^{r_1 x} & \text{se } \Delta = 0, \text{ e} \\ Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\text{sen}(\beta x) & \text{se } \Delta < 0, \end{cases}$$

onde $\Delta := b^2 - 4ac$ **é o discriminante da equação**

$$ar^2 + br + c = 0,$$

r_1 **e** r_2 **são as raizes da mesma, e, no caso em que** $\Delta < 0$**,**

$$r_1 =: \alpha + i\beta \text{ e } r_2 =: \alpha - i\beta.$$