UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito da Segunda Prova Unificada de Cálculo IV - 2019/2, 11/11/2019

Questão 1: (2,5 pontos) Dada a função

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -2 \leq t \leq 0, \\ 2, & 0 < t \leq 2. \end{cases}$$

a) Encontre a série de Fourier de f.

b) Esboce o gráfico da série de Fourier de f obtida no item (a) no intervalo $[-6, 6]$.

c) Calcule a soma da série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Sugestão: integre a série de Fourier de f obtida no item (a) no intervalo $(0, 2)$.

Solução:
a) Calculamos os coeficiente usando as fórmulas de Euler-Fourier,

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 1dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 2dx = 3$$

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 1\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 2\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx \\ =& \frac{1}{n\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_{-2}^{0} + \frac{2}{n\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_{0}^{2} = 0, \end{aligned}$$

para $n \geq 1$. Calculamos b_n para $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 1\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 2\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx \\ =& \frac{1}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - 1\right] + \frac{2}{n\pi}\left[1 - \cos(n\pi)\right] \\ =& \frac{1}{n\pi}\left[1 - \cos(n\pi)\right] = \begin{cases} 0 & m \text{ par} \\ \frac{2}{n\pi} & m \text{ ímpar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto a série de Fourier $\mathcal{F}(f)$ de f é:

$$\mathcal{F}(f)(x) := \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\text{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right). \tag{1}$$

---

b) Pelo teorema da convergência da série de Fourier temos que

$$\mathcal{F}(f)(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & x = 2n, n \in \mathbb{Z}, \\ 1, & x \in (4n+2, 4n+4), n \in \mathbb{Z}, \\ 2, & x \in (4n, 4n+2), n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

O gráfico da série de Fourier $\mathcal{F}(f)(x)$ no intervalo $[-6, 6]$ está desenhado na Figura 1, destacando o valor da série de Fourier nos pontos de descontinuidade de f.

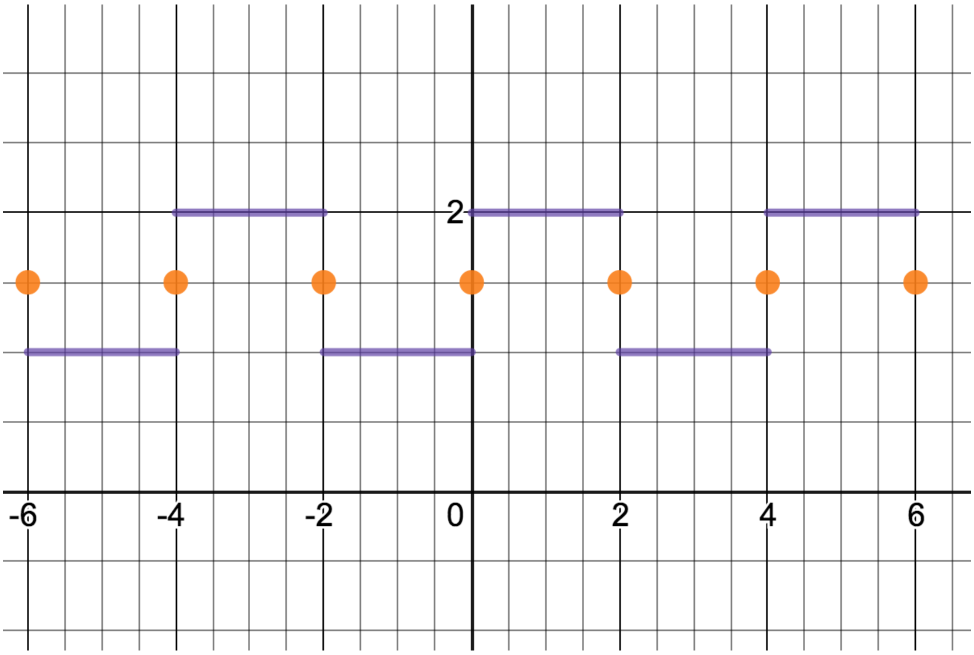

Figura 1: O gráfico da série de Fourier de $f(x)$.

c) 1° *via de Solução:* Observe que $\mathcal{F}(f)(x) = 2$ se $x \in (0, 2)$. Integrando (1) no intervalo $(0, 2)$, tem-se:

$$\int_0^2 2dx = \int_0^2 \frac{3}{2}dx + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\int_0^2 \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right) dx,$$

$$1 = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\left[1 - \cos\left((2k-1)\pi\right)\right],$$

$$1 = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)^2},$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

2° *via de Solução:* Observe que $\mathcal{F}(f)(x) = 2$ se $x \in (0, 2)$. Integrando (1) no intervalo $(0, x)$ com $0 < x < 2$, tem-se:

$$\int_0^x 2dx =: \int_0^x \frac{3}{2}dx + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right) dx$$

por tanto

$$\frac{x}{2} =: \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\left[1-\cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right)\right],$$

e considerando $x = 1$ obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Questão 2: (2,5 pontos) Determine todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ (e todas as soluções correspondentes), para os quais existem soluções não-nulas do problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} y''(x) - \lambda y'(x) + 2y(x) = 0, \\ y(0) = 0, y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Solução:
A equação característica correspondente a EDO é $r^2 - \lambda r + 2 = 0$. O discriminante é $\Delta = \lambda^2 - 8$. Há três casos a serem estudados:

1) $\Delta > 0$, então temos duas raízes reales distintas $r_1 \neq r_2$. A solução geral é $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$. A condição $y(0) = 0$ implica $c_1 + c_2 = 0$, logo $c_1 = -c_2$. A condição $y(2\pi) = 0$ implica $0 = c_1 e^{2\pi r_1} - c_1 e^{2\pi r_2}$, como $r_1 \neq r_2$ temos que $c_1 = 0$ e portanto $c_2 = 0$. Logo no caso $\Delta > 0$ não temos soluções não nulas.

2) $\Delta = 0$, neste caso temos duas raízes reales repetidas $r_1 = r_2 \neq 0$. A solução geral é $y(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^{r_1 x}$. A condição $y(0) = 0$ implica $c_1 = 0$. A condição $y(2\pi) = 0$ implica $0 = 2\pi c_2 e^{2\pi r_1}$, de onde temos que $c_2 = 0$. Logo no caso $\Delta = 0$ não temos soluções não nulas.

3) $\Delta < 0$, as raízes são $r_1 = \frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{|\lambda^2-8|}}{2}i$, $r_2 = \frac{\lambda}{2} - \frac{\sqrt{|\lambda^2-8|}}{2}i$. A solução geral é $y(x) = e^{\frac{\lambda}{2}x}\left(c_1\cos(\frac{\sqrt{|\lambda^2-8|}}{2}x) + c_2\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{|\lambda^2-8|}}{2}x)\right)$. A condição $y(0) = 0$ implica $c_1 = 0$. A condição $y(2\pi) = 0$ implica $0 = y(2\pi) = c_2 e^{\pi\lambda}\mathrm{sen}(\sqrt{|\lambda^2-8|}\pi)$. Segue que $\mathrm{sen}(\sqrt{|\lambda^2-8|}\pi) = 0 \iff \sqrt{|\lambda^2-8|} = n \iff 8-\lambda^2 = n^2 \iff 8 - n^2 = \lambda^2$, onde n é um inteiro estritamente maior que zero. Mas como $8 - n^2 = \lambda^2$ temos que $8 - n^2 > 0$, de onde segue que $n = 1$ e $n = 2$ pelo fato que $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Logo temos somente quatro soluções não nulas:

$y(x) = c_2 e^{\frac{\sqrt{7}}{2}x}\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ associada a $\lambda = \sqrt{7}$,

$y(x) = c_2 e^{-\frac{\sqrt{7}}{2}x}\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ associada a $\lambda = -\sqrt{7}$,

$y(x) = c_2 e^{2x}\mathrm{sen}\,(x)$ associada a $\lambda = 2$,

$y(x) = c_2 e^{-2x}\mathrm{sen}\,(x)$ associada a $\lambda = -2$.

Questão 3: (2,5 pontos) Encontre a solução $u(x,t)$ do problema:

$$\begin{cases} 5u_{xx} = u_t \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \mathrm{sen}(2\pi x) - \mathrm{sen}(7\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Solução:
Pelo método de separação de variáveis, da suposição $u(x,t) = X(x)T(t)$ chegamos no sistema de EDO

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ T' + 5\lambda T = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Utilizamos as condições de contorno para $u(x,t)$ para deduzir condições de contorno para $X(x)$,

$$\begin{aligned} 0 = u(0,t) = X(0)T(t) \qquad &\Longrightarrow \qquad X(0) = 0, \\ 0 = u(1,t) = X(1)T(t) \qquad &\Longrightarrow \qquad X(1) = 0. \end{aligned}$$

Assim temos que solucionar o problema de contorno

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0,\ X(1) = 0. \end{cases}$$

A solução é fornecida no verso da prova, neste caso os autovalores são

$$\lambda = n^2\pi^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

e as autofunções associadas com eles são proporcionais com

$$X_n = \text{sen}(n\pi x), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Retornando ao sistema (2) temos o problema de valor inicial

$$T' + 5n^2\pi^2 T = 0,$$

que tem solução geral

$$T_n(t) = e^{-5n^2\pi^2 t}. \tag{4}$$

As soluções fundamentais são $u_n(x,t) = e^{-5n^2\pi^2 t}\text{sen}(n\pi x)$. Pelo princípio de superposição a solução geral de este problema é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-5n^2\pi^2 t}\text{sen}(n\pi x).$$

Como $u(x,t)$ tem que satisfazer a condição inicial $\sin(2\pi x) - \sin(7\pi x) = u(x,0)$,isto é

$$\text{sen}(2\pi x) - \text{sen}(7\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(n\pi x).$$

Segue das relações de ortogonalidade das funções seno que isto só é possível se

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 2, \\ -1 & n = 7, \\ 0 & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Logo a solução de este problema é:

$$u(x,t) = e^{-20\pi^2 t}\text{sen}(2\pi x) - e^{-245\pi^2 t}\text{sen}(7\pi x).$$

Questão 4: (2.5 pontos) Encontre todas as soluções u da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$ do problema:

$$x^2y^2u_{xy} = x^2u_x + y^2u_y, \quad x>0, \ y>0. \tag{5}$$

Solução:
1° *via de Solução:* Substituindo na equação (5) temos

$$\begin{aligned} x^2y^2X'Y' &= x^2X'Y + y^2XY' \\ x^2y^2X'Y' - x^2X'Y &= y^2XY' \\ x^2X'(y^2Y' - Y) &= y^2XY' \\ \frac{x^2X'}{X} &= \frac{y^2Y'}{y^2Y' - Y}. \end{aligned}$$

Como o lado esquerdo é constante em y e o lado direito é constante em x, os dois são iguais a uma constante λ. Assim

$$\frac{x^2X'}{X} = \frac{y^2Y'}{y^2Y'-Y} = \lambda. \tag{6}$$

De (6), segue que $x^2\dfrac{X'}{X} = \lambda$, então

$$\begin{aligned} \frac{X'}{X} &= \frac{\lambda}{x^2} \\ \ln(X(x)) &= -\frac{1}{x}\lambda + C \\ X(x) &= e^Ce^{-\frac{1}{x}\lambda} \\ X(x) &= Ae^{-\frac{1}{x}\lambda}, \end{aligned}$$

onde A e C são constantes.
De (6), também temos $y^2Y' = \lambda y^2Y' - \lambda Y$, então

$$\begin{aligned} y^2Y'(1-\lambda) &= -\lambda Y \\ \frac{Y'}{Y} &= \frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{1}{y^2} \\ \ln(Y(y)) &= -\frac{1}{y}\frac{\lambda}{\lambda-1} + K, \end{aligned}$$

portanto, $Y(y) = Be^{-\frac{1}{y}\frac{\lambda}{\lambda-1}}$ onde B e K saõ constantes.
Logo $u(x,y) = Ce^{-\frac{1}{x}\lambda}e^{-\frac{1}{y}\frac{\lambda}{\lambda-1}}$ onde C é uma constante.
2° *via de Solução:* Substituindo na equação (5) temos

$$x^2y^2X'Y' = x^2X'Y + y^2XY'$$

como $x,y>0$, dividimos por x^2y^2 a ambos lados da igualdade acima, obtendo

$$X'Y' = \frac{1}{y^2}X'Y + \frac{1}{x^2}XY'.$$

Vamos supor que $X'Y' \neq 0$, então

$$1 = \frac{1}{y^2}\frac{Y}{Y'} + \frac{1}{x^2}\frac{X}{X'}$$

ou

$$1 - \frac{1}{y^2}\frac{Y}{Y'} = \frac{1}{x^2}\frac{X}{X'} = \lambda. \tag{7}$$

De (7), como $\dfrac{X}{X'} = x^2\lambda$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{X'}{X} &= \frac{1}{x^2\lambda} \\
\ln(X(x)) &= -\frac{1}{x}\frac{1}{\lambda} + C \\
X(x) &= Ae^{-\frac{1}{x}\frac{1}{\lambda}}.
\end{aligned}$$

onde A e C saõ constantes.

De (7) temos também, $\dfrac{1}{y^2}\dfrac{Y}{Y'} = 1 - \lambda$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{Y}{Y'} &= (1-\lambda)y^2 \\
\frac{Y'}{Y} &= \frac{1}{y^2(1-\lambda)} \\
\ln(Y(y)) &= -\frac{1}{y(1-\lambda)} \\
Y(y) &= -\frac{1}{y(1-\lambda)} + K \\
Y(y) &= Be^{-\frac{1}{y(1-\lambda)}}.
\end{aligned}$$

onde B e K são constantes.

Assim temos que quando $X'Y' \neq 0$ as soluções são $u(x,t) = Ce^{-\frac{1}{x}\frac{1}{\lambda}}e^{-\frac{1}{y(1-\lambda)}}$.

Por outro lado, se $X'Y' = 0$ então $X' = 0$ ou $Y' = 0$. Se $X' = 0$, então $X(x)$ é uma constante, e segue da equação (5) que $Y(y)$ é constante também. Anâlogamente se $Y' = 0$ segue da equação (5) que $X' = 0$, logo $X(x)$ e $Y(y)$ são constantes. Temos então que se $X'Y' = 0$, $u(x,t)$ é a solução constante.

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A. Tabela resumo para EDO $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} r_1, r_2 \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ r_1 \neq r_2 &\implies y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}. \\ r_1, r_2 \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ r_1 = r_2 &\implies y(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^{r_1 x}. \\ r_1 = \alpha + \beta i \ \text{ e } \ r_2 = \alpha - \beta i &\implies y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta x)\right), \end{aligned}$$

onde r_1 e r_2 são as raízes da equação característica $ar^2 + br + c = 0$.

B. O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$