



Segunda Prova Unificada de Cálculo IV - 2019/2, 11/11/2019

Questão 1: (2,5 pontos) Dada a função

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -2 \leq t \leq 0, \\ 2, & 0 < t \leq 2. \end{cases}$$

- Encontre a série de Fourier de f .
- Esboce o gráfico da série de Fourier de f obtida no item (a) no intervalo $[-6, 6]$.
- Calcule a soma da série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Sugestão: integre a série de Fourier de f obtida no item (a) no intervalo $(0, 2)$.

Questão 2: (2,5 pontos) Determine todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ (e todas as soluções correspondentes), para os quais existem soluções não-nulas do problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} y''(x) - \lambda y'(x) + 2y(x) = 0, \\ y(0) = 0, y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Questão 3: (2,5 pontos) Encontre a solução $u(x, t)$ do problema:

$$\begin{cases} 5u_{xx} = u_t & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x) - \text{sen}(7\pi x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Questão 4: (2,5 pontos) Encontre todas as soluções u da forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$ do problema:

$$x^2 y^2 u_{xy} = x^2 u_x + y^2 u_y, \quad x > 0, y > 0.$$

**Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!**

A. Tabela resumo para EDO $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ e } r_1 \neq r_2 \implies y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

$$r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ e } r_1 = r_2 \implies y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{r_1 x}.$$

$$r_1 = \alpha + \beta i \text{ e } r_2 = \alpha - \beta i \implies y(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)),$$

onde r_1 e r_2 são as raízes da equação característica $ar^2 + br + c = 0$.

B. O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2 \pi^2 / L^2$, $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right).$$