TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (2.5 pontos)

(a) Determine a série de Fourier em cosenos da função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^2$.

(b) Utilizando o resultado em parte (a) e o teorema de convergência de Fourier, demonstre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Solução:

A série de Fourier da função f é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x),$$

onde os coeficientes a_0, a_n são dados por

$$a_0 = \frac{2}{1}(2x - x^2)dx = 4.\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - 2.\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3},$$

e

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 (2x - x^2)\cos(n\pi x)dx, \\
&= 2\left((2x - x^2)\frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\Big|_0^1 - \int_0^1 -2.\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi x)dx \right), \\
&= 0 + \frac{-2}{n\pi}\left((2 - 2x)\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 - \int_0^1 -2.\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi x)dx \right), \\
&= \frac{-2}{n\pi}\left((0 + \frac{2}{n\pi}\cos(0)) - \frac{2}{n\pi}(\operatorname{sen}(n\pi x)|_0^1) \right), \\
&= \frac{-4}{(n\pi)^2}.
\end{aligned}$$

Logo, a série de Fourier da função é

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos(n\pi x).$$

Pelo teorema de Fourier, uma vez que a função $f(x)$ satisfaz $f(0) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos(n\pi 0) &= 0, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Encontre a solução do problema de valor de contorno

$$
\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} + u &= 0, \quad \text{para} \quad (x, y) \in (0,1) \times (0,3), \\
u(0,y) = 0 & \qquad u(1,y) = 0, \\
u(x,0) = 0, & \qquad u(x,3) = 3 - x.
\end{aligned}
$$

Solução:

Tentamos uma solução na forma de um produto $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Isso força as funções X e Y a satisfazerem $X(0) = 0$, $X(1) = 0$ e $Y(0) = 0$. Na equação diferencial nós temos,

$$
\begin{aligned}
X_{xx}Y + XY_{yy} + XY &= 0, \\
\frac{X_{xx}}{X} = -\left(\frac{Y_{yy}}{Y} + 1\right) &= -\lambda,
\end{aligned}
$$

para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Isso podemos reanjar para obter $X_{xx} + \lambda X = 0$, com condições de contorno $X(0) = 0$, $X(1) = 0$. Soluções não-triviais para esse sistema existem somente para $\lambda = (n\pi)^2$, com soluções $X_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x)$.

No sistema para Y, temos $Y_{yy} - \left((n\pi)^2 - 1\right) Y = 0$. Observamos que o coeficiente de Y aqui é negativo, então a solução geral real dessa equação é

$$
Y(y) = A \operatorname{senh}\left(\sqrt{(n\pi)^2 - 1}y\right) + B \cosh\left(\sqrt{(n\pi)^2 - 1}y\right).
$$

A condição $Y(0) = 0$ implica que $B = 0$ e $Y_n(y) = \operatorname{senh}\left(\sqrt{(n\pi)^2 - 1}y\right)$ e obtemos a solução $u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \operatorname{senh}\left(\sqrt{(n\pi)^2 - 1}y\right) \operatorname{sen}(n\pi x)$. Para encontrar uma solução com $u(x,3) = 3 - x$, formamos a função

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y), \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\left(\sqrt{(n\pi)^2 - 1}y\right) \operatorname{sen}(n\pi x).
\end{aligned}
$$

Pelo teorema de convergência de Fourier, essa solução satisfaz $u(x,3) = 3 - x$ se os coeficientes c_n são escolhidos por

$$
\begin{aligned}
c_n \operatorname{senh}\left(3\sqrt{(n\pi)^2 - 1}\right) &= \frac{2}{1}\int_0^1 (3 - x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx, \\
&= 2\left((3 - x)\frac{-1}{n\pi} \cos(n\pi x)\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{n\pi} \cos(n\pi x) dx \right), \\
&= \frac{2}{n\pi}(3 - 2(-1)^n), \\
c_n &= \frac{2}{n\pi} \frac{(3 - 2(-1)^n)}{\operatorname{senh}(3\sqrt{(n\pi)^2 - 1})}. \\
\text{Então} \quad u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{(3 - 2(-1)^n)}{\operatorname{senh}(3\sqrt{(n\pi)^2 - 1})} \operatorname{senh}\left(\sqrt{(n\pi)^2 - 1}y\right) \operatorname{sen}(n\pi x).
\end{aligned}
$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Encontre todas as soluções u da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$ do problema

$$u_x + u_y = 2(x^2 + y^2)u, \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Solução:

Para uma solução na forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$, as funções X e Y satisfazem

$$\begin{aligned} X_x Y + X Y_y &= 2x^2 XY + 2y^2 XY, \\ \frac{X_x}{X} - 2x^2 &= \frac{-Y_y}{Y} + 2y^2 = \lambda, \end{aligned}$$

para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim obtemos duas equações diferenciais ordinárias para X e Y separadamente :

$$\begin{aligned} \frac{X_x}{X} &= 2x^2 + \lambda, \\ \frac{Y_y}{Y} &= 2y^2 - \lambda. \end{aligned}$$

Essas equações tem soluções

$$\begin{aligned} X(x) &= Ae^{2/3x^3 + \lambda x}, \\ Y(y) &= Be^{2/3y^3 - \lambda y}, \end{aligned}$$

para $A, B \in \mathbb{R}$. A solução geral, como um produto, da equação diferencial parcial original é

$$u(x,y) = Ce^{2/3x^3 + \lambda x} e^{2/3y^3 - \lambda y}$$

para constantes $C, \lambda \in \mathbb{R}$.

Questão 4: (2.5 pontos)

Encontre todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, e todas as soluções associadas, para os quais existem soluções não-nulas do problema de valor de contorno (para $L > 0$):

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, \\ y(0) &= 0, \\ \frac{dy}{dx}(L) &= 0. \end{aligned}$$

Solução:

Para encontrar a solução geral de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem e com coeficientes constantes pode ser encontrada adivinhando uma solução da forma $y(x) = e^{rx}$ e fazendo uma combinação linear das soluções encontradas. Para essa função $y'' + \lambda y = e^{rx}(r^2 + \lambda) = 0$ se $r^2 = \lambda$. Logo, a forma da solução depende sobre o sinal de λ.

Para $\lambda = -\mu^2 < 0$ (para $\mu > 0$), a solução geral é da forma

$$y(x) = A\,\mathrm{senh}(\mu x) + B\cosh(\mu x).$$

Para satisfazer a condição $y(0) = 0$, é necessário $B = 0$ e $y(x) = A\,\mathrm{senh}(\mu x)$. Nesse caso, $y'(x) = A\mu\cosh(\mu x)$. Então $y'(L) = A\mu\cosh(L) = 0$ implica que $A = 0$ e temos somente a solução trivial quando $\lambda < 0$.

Para $\lambda = 0$, a equação $y'' = 0$ tem solução geral $y(x) = Ax + B$. $B = 0$ por que $y(0) = 0$ e $y'(L) = 0$ força $A = 0$ e temos somente a solução trivial para $\lambda = 0$.

Se $\lambda = \mu^2 > 0$ (de novo $\mu > 0$), a equação $y'' + \mu^2 y = 0$ tem solução geral

$$y(x) = A\,\mathrm{sen}(\mu x) + B\cos(\mu x).$$

Temos $y(0) = B$, que deve ser igual a zero, pela primeira condição de contorno. Pelo outro lado, $y'(x) = A\mu\cos(\mu x)$ e $y'(L) = A\mu\cos(\mu L) = 0$ implica que ou $A = 0$, ou $\cos(\mu L) = 0$. Para evitar uma solução trivial, temos a segunda possibilidade. Isso vale se μL é um múltiplo ímpar de $\pi/2$. Isto é,

$$\mu = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3\ldots$$

com solução associada $y_n(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$.

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>0$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>0$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-\ldots-f^{(m-1)}(0)$

Integrais úteis.

$$\int x^m\cos(\alpha x)dx = \frac{x^m}{\alpha}\operatorname{sen}(\alpha x) - \frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\operatorname{sen}(\alpha x)dx$$
$$\int x^m\operatorname{sen}(\alpha x)dx = -\frac{x^m}{\alpha}\cos(\alpha x) + \frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\cos(\alpha x)dx$$

O problema

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=0, y(L)=0 \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, $n\in\mathbb{N}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$