TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (2.5 pontos)

(a) Determine a série de Fourier em cosenos da função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^2$.

(b) Utilizando o resultado em parte (a) e o teorema de convergência de Fourier, demonstre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Questão 2: (2.5 pontos)
Encontre a solução do problema de valor de contorno

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u &= 0, \quad \text{para} \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,3), \\ u(0,y) = 0 & \qquad u(1,y) = 0, \\ u(x,0) = 0, & \qquad u(x,3) = 3 - x. \end{aligned}$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Encontre todas as soluções u da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$ do problema

$$u_x + u_y = 2(x^2 + y^2)u, \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Questão 4: (2.5 pontos)
Encontre todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, e todas as soluções associadas, para os quais existem soluções não-nulas do problema de valor de contorno (para $L > 0$):

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, \\ y(0) &= 0, \\ \frac{dy}{dx}(L) &= 0. \end{aligned}$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s > 0$
$t^m\ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > 0$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s > 0$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \lvert a\rvert$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - \ldots - f^{(m-1)}(0)$

Integrais úteis.

$$\int x^m \cos(\alpha x)dx = \frac{x^m}{\alpha}\operatorname{sen}(\alpha x) - \frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\operatorname{sen}(\alpha x)dx$$
$$\int x^m \operatorname{sen}(\alpha x)dx = -\frac{x^m}{\alpha}\cos(\alpha x) + \frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\cos(\alpha x)dx$$

O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, y(L) = 0 \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, $n \in \mathbb{N}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$