TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (2.5 pontos)

Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ a função

$$f(x) := \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right).$$

(a) Determine a série de Fourier em cossenos de f.

Solução:

Pelas equações de Euler-Fourier, os coeficientes da série de Fourier em cossenos de f são

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \tilde{f}(x)dx, \text{ e} \\ a_m &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \tilde{f}(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right), \end{aligned}$$

onde $\tilde{f} : [-2,2] \to \mathbb{R}$ é a extensão par de f. Assim

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^2 f(x)dx \\ &= \int_0^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx \\ &= \left[-\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]_0^2 \\ &= \frac{4}{\pi}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{4}{\pi}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_m &= \int_0^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{m\pi x}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}-\frac{m\pi x}{2}\right)\right]dx \\ &= \left[\frac{(-2)}{(1+2m)\pi}\cos\left(\frac{(1+2m)\pi x}{4}\right)+\frac{(-2)}{(1-2m)\pi}\cos\left(\frac{(1-2m)\pi x}{4}\right)\right]_0^2 \\ &= \frac{2}{(1+2m)\pi}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+m\pi\right)\right] \\ &\qquad + \frac{2}{(1-2m)\pi}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-m\pi\right)\right]. \end{aligned}$$

Observe-se que para todo inteiro m,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+m\pi\right) = -\text{sen}(m\pi) = 0$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-m\pi\right) = \text{sen}(m\pi) = 0.$$

Assim,

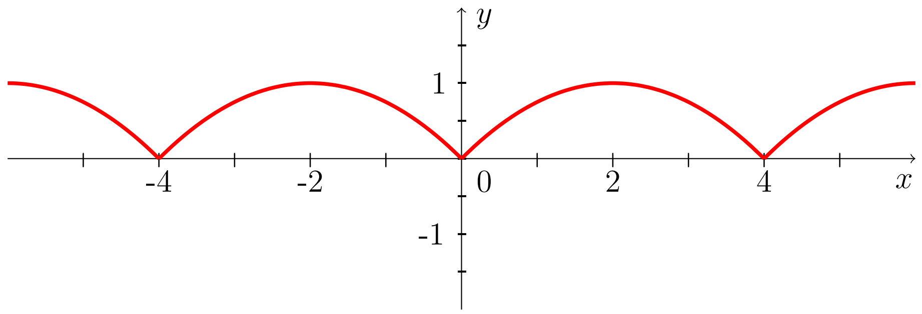
$$a_m = \frac{2}{(1+2m)\pi} + \frac{2}{(1-2m)\pi} = \frac{4}{(1-4m^2)\pi}.$$

A série de Fourier em cossenos de f é então

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(1-4m^2)\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right). \end{aligned}$$

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo $[-6, 6]$.

Solução:



(c) Calcule o valor da série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m^2-1}.$$

Solução:
Como a extensão par é contínua em zero, pelo teorema de convergência de Fourier, temos

$$0 = f(0) = \frac{2}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(1-4m^2)\pi}.$$

Assim
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(4m^2-1)} = \frac{1}{2}.$$

Questão 2: (2.5 pontos)
Determine todos os valores de λ para os quais o seguinte problema de EDO com condições de contorno tem ao menos uma solução diferente de zero.

$$\begin{cases} u'' + 2u' &= \lambda u, \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 0. \end{cases}$$

Solução:
Procuramos primeiro soluções (u, λ) do problema

$$u'' + 2u' - \lambda u = 0.$$

O discriminante é

$$\Delta = 4(1+\lambda).$$

Há três casos a serem estudados.

1: $\Delta > 0$. A solução geral é

$$u(x) = Ae^{-(1+\sqrt{1+\lambda})x} + Be^{-(1-\sqrt{1+\lambda})x}.$$

Substituindo nas condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} u(0) &= A + B = 0 \\ \therefore \quad A &= -B \\ u(1) &= Ae^{-(1+\sqrt{1+\lambda})} - Ae^{-(1-\sqrt{1+\lambda})} \\ &= 2Ae^{-1}\text{senh}(\sqrt{1+\lambda}) \\ \therefore \quad A &= 0. \end{aligned}$$

Assim, não há soluções diferentes de zero para $\Delta > 0$.
2: $\Delta = 0$. A solução geral é

$$u(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}.$$

Substituindo nas condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} u(0) &= A = 0 \\ u(1) &= Be^{-1} = 0 \\ \therefore \quad B &= 0. \end{aligned}$$

Assim, não há soluções diferentes de zero para $\Delta = 0$.

3: $\Delta < 0$. A solução geral é

$$u(x) = Ae^{-x}\cos(\sqrt{|1+\lambda|}x) + Be^{-x}\text{sen}(\sqrt{|1+\lambda|}x).$$

Substituindo nas condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} u(0) &= A = 0, \\ u(1) &= Be^{-1}\text{sen}(\sqrt{|1+\lambda|}). \end{aligned}$$

Segue que há soluções diferentes de zero se e somente se

$$\begin{aligned} &\text{sen}(\sqrt{|1+\lambda|}) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &\sqrt{|1+\lambda|} = m\pi \text{ para } m > 0 \text{ inteiro} \\ \Leftrightarrow \quad &|1+\lambda| = m^2\pi^2. \end{aligned}$$

Como $1 + \lambda = \Delta < 0$, segue que há soluções diferentes de zero se e somente se

$$\begin{aligned} 1 + \lambda &= -m^2\pi^2 \\ \Leftrightarrow \quad \lambda &= -(1 + m^2\pi^2). \end{aligned}$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Determine a solução $u(x,t) : [0,4] \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$ do problema

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} - u & (x,t) \in]0,4[\times]0,\infty[, \\ u(x,0) = 0 & x \in]0,4[, \\ u_t(x,4) = x(4-x) & x \in]0,4[, \\ u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0 & t \in]0,\infty[. \end{cases}$$

Solução:

Procuramos primeiro soluções separáveis do problema homogêneo. Seja

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Substituindo na EDP, temos

$$\begin{aligned} XT'' &= 4X''T - XT \\ \therefore \quad \frac{X''}{X} &= \frac{T''}{4T} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Como o lado esquerdo é constante em t e o lado direito é constante em x, os dois são iguais a uma constante λ. Isto é

$$X'' = \lambda X,$$
$$T'' = (4\lambda - 1)T.$$

Substituindo nas condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} & u_x(0,t) &= 0\ \forall t \\ \therefore\ & X'(0)T(t) &= 0\ \forall t \\ \therefore\ & X'(0) &= 0 \\ & u_x(4,t) &= 0\ \forall t \\ \therefore\ & X'(4)T(t) &= 0\ \forall t \\ \therefore\ & X'(4) &= 0. \end{aligned}$$

Substituindo na condição inicial, temos

$$\begin{aligned} & u(x,0) &= 0\ \forall x \\ \therefore\ & X(x)T(0) &= 0\ \forall x \\ \therefore\ & T(0) &= 0. \end{aligned}$$

Os autovalores e as autofunções do problema

$$X'' = \lambda X,\ X'(0) = 0,\ X'(4) = 0,$$

são

$$\lambda_m = -\frac{m^2\pi^2}{16},$$

para $m \in \{0, 1, 2, ...\}$ e

$$X_0 = 1,\ \text{e}$$
$$X_m = \cos\left(\frac{m\pi x}{4}\right),\ m > 0.$$

Substituindo na equação para T temos

$$\begin{aligned} & T''_m = -\left(1 + \frac{m^2\pi^2}{4}\right)T_m \\ \therefore\ & T_m = A_m\cos\left(\sqrt{1 + \frac{m^2\pi^2}{4}}t\right) + B_m\text{sen}\left(\sqrt{1 + \frac{m^2\pi^2}{4}}t\right). \end{aligned}$$

Como $T_m(0) = 0$, temos $A_m = 0$. Assim,

$$T_m = B_m \text{sen}\left(\sqrt{1 + \frac{m^2\pi^2}{4}}t\right).$$

A solução geral do problema homegêneo é então

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}a_0 \text{sen}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{4}\right) \text{sen}\left(\sqrt{1 + \frac{m^2\pi^2}{4}}t\right) \\ \therefore \quad u_t(x,t) &= \frac{1}{2}a_0 \cos(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2}a_m \sqrt{4 + m^2\pi^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{4}\right) \cos\left(\sqrt{1 + \frac{m^2\pi^2}{4}}t\right) \end{aligned}$$

Avaliando a derivada em $t = 4$, temos

$$u_t(x,4) = \frac{1}{2}a_0 \cos(4) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2}a_m \sqrt{4 + m^2\pi^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{4}\right) \cos\left(2\sqrt{4 + m^2\pi^2}\right)$$

Aplicando as fórmulas de Euler-Fourier, temos

$$a_0 \cos(4) = \frac{1}{2}\int_0^4 x(4-x)dx = \frac{16}{3}.$$

Assim

$$a_0 = \frac{16}{3\cos(4)}.$$

Da mesma forma, temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}a_m \sqrt{4 + m^2\pi^2} \cos(2\sqrt{4 + m^2\pi^2}) \\ &\qquad = \frac{1}{2}\int_0^4 x(4-x)\cos\left(\frac{m\pi x}{4}\right)dx \\ &\qquad = \left[\frac{2}{m\pi}x(4-x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{4}\right)\right]_0^4 \\ &\qquad\qquad - \int_0^4 \frac{4}{m\pi}(2-x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{4}\right)dx \\ &\qquad = \left[\frac{16}{m^2\pi^2}(2-x)\cos\left(\frac{m\pi x}{4}\right)\right]_0^4 \\ &\qquad\qquad + \int_0^4 \frac{16}{m^2\pi^2}\cos\left(\frac{m\pi x}{4}\right)dx \\ &\qquad = -\frac{32}{m^2\pi^2}\cos(m\pi) - \frac{32}{m^2\pi^2} + \left[\frac{64}{m^3\pi^3}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{4}\right)\right]_0^4 \\ &\qquad = \frac{-32}{m^2\pi^2}\big(1 + (-1)^m\big). \end{aligned}$$

Segue que

$$u(x,t) = \frac{8\text{sen}(t)}{3\cos(4)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{64(1+(-1)^m)}{m^2\pi^2\sqrt{4+m^2\pi^2}\cos(2\sqrt{4+m^2\pi^2})} \cos\left(\frac{m\pi x}{4}\right) \text{sen}\left(\sqrt{1+\frac{m^2\pi^2}{4}}t\right).$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Encontre todas as soluções u da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$ do problema

$$xyu_{xy} + xu_x + yu_y = 0, \ (x,y) \in]0,\infty[\times]0,\infty[.$$

Solução:

Substituindo na equação temos

$$\begin{aligned} & xyX'Y' + xX'Y + yXY' && = 0 \\ \therefore \quad & xyX'Y' + xX'Y + yXY' + XY = XY \\ \therefore \quad & xy\frac{X'}{X}\frac{Y'}{Y} + x\frac{X'}{X} + y\frac{Y'}{Y} + 1 && = 1 \\ \therefore \quad & \left(x\frac{X'}{X}+1\right)\left(y\frac{Y'}{Y}+1\right) && = 1. \end{aligned}$$

Observe-se em particular que cada um dos dois fatores é diferente de zero. Temos então

$$\left(x\frac{X'}{X}+1\right) = \frac{1}{\left(y\frac{Y'}{Y}+1\right)}.$$

Como o lado esquerdo é constante em y e o lado direito é constante em x, os dois são iguais a uma constante $\lambda \neq 0$. Assim

$$\left(x\frac{X'}{X}+1\right) = \lambda = \frac{1}{\left(y\frac{Y'}{Y}+1\right)}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \frac{X'}{X} & = (\lambda-1)\frac{1}{x} \\ \frac{Y'}{Y} & = \left(\frac{1}{\lambda}-1\right)\frac{1}{y} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \log_e(X) = a + (\lambda-1)\log_e(x)$$

$$\log_e(Y) = b + \left(\frac{1}{\lambda}-1\right)\log_e(y)$$

$$\therefore \quad X = Ax^{\lambda-1}$$

$$Y = By^{\frac{1}{\lambda}-1}$$

Assim

$$u(x,y) = Cx^{\lambda-1}y^{\frac{1}{\lambda}-1}$$

onde $\lambda \neq 0$.

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A : O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y'(0) = 0, y'(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -m^2\pi^2/L^2$**,** $m \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$**, e as autofunções correspondentes são**

$$\begin{cases} y_0(x) = 1, \ \textbf{e} \\ y_m(x) = \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \ m \geq 1. \end{cases}$$

B : Identidades trigonométricas fundamentais.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big)$$

$$\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$$

$$\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)\big).$$