



TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (2.5 pontos)

Seja $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ a função

$$f(x) := \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right).$$

- (a) Determine a série de Fourier em cossenos de f .
- (b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo $[-6, 6]$.
- (c) Calcule o valor da série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m^2 - 1}.$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Determine todos os valores de λ para os quais o seguinte problema de EDO com condições de contorno tem ao menos uma solução diferente de zero.

$$\begin{cases} u'' + 2u' = \lambda u, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Determine a solução $u(x, t) : [0, 4] \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ do problema

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} - u & (x, t) \in]0, 4[\times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = 0 & x \in]0, 4[, \\ u_t(x, 4) = x(4 - x) & x \in]0, 4[, \\ u_x(0, t) = u_x(4, t) = 0 & t \in]0, \infty[. \end{cases}$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Encontre todas as soluções u da forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$ do problema

$$xyu_{xy} + xu_x + yu_y = 0, \quad (x, y) \in]0, \infty[\times]0, \infty[.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A : O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y'(0) = 0, y'(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -m^2\pi^2/L^2$, $m \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, e as autofunções correspondentes são

$$\begin{cases} y_0(x) = 1, \text{ e} \\ y_m(x) = \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad m \geq 1. \end{cases}$$

B : Identidades trigonométricas fundamentais.

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$$

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\text{sen}(b)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b))$$

$$\text{sen}(a)\text{sen}(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

$$\text{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\text{sen}(a - b) + \text{sen}(a + b)).$$