UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Segunda Prova Unificada de Cálculo IV - 2017/2 - 14/11/2017

Questão 1: (2.5 pontos) Seja $f(x) := \operatorname{sen}(\pi x/2)$ para $x \in [0, 1]$.

(a) Calcule a série de Fourier em senos da função $f(x)$.

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo $[-3, 3]$.

(c) Calcule o valor limite da série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(1+2k)}{(1+2k)^2 - 1/4}$.

Questão 2: (2,5 pontos) Encontre todos os valores de λ para os quais existem soluções não triviais da seguinte equação de Euler com condições de contorno.

$$\begin{cases} x^2 y'' + \frac{\lambda}{4} y = 0, \\ y(1) = 0, \; y(4) = 0. \end{cases}$$

Quais são as soluções não triviais?

Questão 3: (2,5 pontos) Encontre a solução u do problema

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = u(x,y), \; (x,y) \in (0,4) \times (-2,2), \\ u(x,-2) = u(x,2) = g(x), \; x \in [0,4], \\ u(0,y) = u(4,y) = 0, \; y \in [-2,2], \end{cases}$$

onde $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1, \\ 4 & \text{se } 1 \le x < 3, \\ 0 & \text{se } 3 \le x \le 4. \end{cases}$$

Question 4: (2.5 pontos)
Encontre todas as soluções u da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$ do problema

$$u_x + u_y = 2(x+y)u, \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

ALGUMAS FORMULAS ÚTEIS

A. $\text{sen}(a)\text{sen}(b) = \dfrac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$.

B. Se r_1, r_2 são as raizes da equação indicial associada a equação de Euler

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

então a solução geral dessa equação é:

- $y(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_1}\ln(x)$ se $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$.
- $y(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$ se $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.
- $y(x) = c_1x^u\cos(v\ln(x)) + c_2x^u\,\text{sen}(v\ln(x))$ se $r_1 = u + iv$ e $r_2 = u - iv$.

C. O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ n \geq 1.$$

D. $\displaystyle\int \frac{X'(x)}{X(x)}dx = \ln X(x) + C.$