



Segunda Prova Unificada de Cálculo IV - 2017/1, 06/06/2017

**Questão 1:** (2.5 pontos)

Determine todos os valores de  $\lambda$  para os quais o seguinte problema de EDO com condições de contorno tem ao menos uma solução não trivial.

$$\begin{cases} Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \\ Y'(0) = 0; Y'(2) = 0. \end{cases}$$

**Questão 2:** (2.5 pontos)

Seja  $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x < 2, \\ 2x - 8 & \text{se } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

- Determine a série de Fourier em senos de  $f$ .
- Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo  $[-12, 12]$ .
- Calcule o valor da série  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)}$ .

**Dica:**  $\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 0$  para  $m$  ímpar e  $\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 0$  para  $m$  par.

**Questão 3:** (2.5 pontos) Determine a solução  $u(x, t)$  do problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, 4) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(4, t) = 10, & t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = 10 \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 10, & x \in (0, 4). \end{cases}$$

**Questão 4:** (2.5 pontos) Considere o seguinte problema:

$$u_{yy} + u_{xy} = xu_y, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

- Ache todas as soluções não triviais dessa equação que possam ser escritas na forma  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ .
- Ache uma solução não trivial que satisfaz

$$u(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u_x(0, 0) = 0.$$

**Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.**

**FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!**

A. O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores  $\lambda = -n^2\pi^2/L^2$ ,  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ , e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \geq 1.$$

B.  $\int \frac{X'(x)}{X(x)} dx = \ln X(x) + C.$