UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Segunda Prova Unificada de Cálculo IV- 2016/2, 01/12/2016

Questão 1: (2.0 pontos)

(a) Determine a série de Taylor em torno de $x = 0$ da função $f(x) = \dfrac{x^2}{1+2x^3}$.

(b) Determine o intervalo de convergência da série encontrada em (a).

Questão 2: (3.0 pontos)
Seja $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } -4 \leq x < -2, \\ 4 - x^2 \text{ se } -2 \leq x < 2, \\ 0 \text{ se } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier de f.

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo $[-12, 12]$.

(c) Calcule o valor da série $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$.

Questão 3: (3.0 pontos) Determine a solução $u(x, t)$ do seguinte problema que representa o comportamento oscilatório de uma corda elástica com extremidades fixas.

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = u, & (x,t) \in (0, 10) \times (0, +\infty), \\ u(0,t) = u(10,t) = 0, & t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, 10), \\ u_t(x, 0) = x(10 - x), & x \in (0, 10). \end{cases}$$

Questão 4: (2.0 pontos) Considere o seguinte problema :

$$u_{xx} + u_{xy} + u_x = 0, \ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

(a) Ache todas as soluções não triviais dessa equação que possam ser escritas na forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

(b) Ache uma solução não trivial que satisfaz

$$u(0, 0) = 0 \ \text{ e } \ u_{xx}(0, 0) = 0.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A: O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ n \geq 1.$$

B: Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s}, \ s > 0$
$t^m \ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}}, \ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \ s > a$
$t^m e^{at} \ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, \ s > a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$e^{at}\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \ s > \|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \ s > \|a\|$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$