TEMPO DE PROVA: 2h

Questão 1: (3.0 pontos)

Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = g(t), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < 3; \\ 7, & \text{se } t \geq 3. \end{cases}$$

Solução:

Escreva g como $g(t) = 7u_3(t)$. Daí, $\mathcal{L}[g(t)] = 7e^{-3s}/s$. Portanto, aplicando a transformada de Laplace na equação e usando as condições iniciais:

$$\begin{aligned} \frac{7e^{-3s}}{s} &= \mathcal{L}[y'' - 4y' + 5y] \\ &= (s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0)) - 4(s\mathcal{L}[y] - y(0)) + 5\mathcal{L}[y] \\ &= (s^2 - 4s + 5)\mathcal{L}[y] \end{aligned}$$

Daí obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y] &= \frac{7e^{-3s}}{s(s^2 - 4s + 5)} \\ &= \frac{7e^{-3s}}{5}\left(\frac{1}{s} - \frac{s-4}{s^2 - 4s + 5}\right) \\ &= \frac{7e^{-3s}}{5}\left(\frac{1}{s} - \frac{s-2}{(s-2)^2+1} + 2\frac{1}{(s-2)^2+1}\right) \\ &= \mathcal{L}\left[\frac{7}{5}u_3(t)f(t-3)\right], \end{aligned}$$

onde $f(t) = 1 - e^{2t}(\cos(t) + 2\sin(t))$. Portanto, a solução é

$$y(t) = \frac{7}{5}u_3(t)(1 - e^{2(t-3)}(\cos(t-3) + 2\sin(t-3))).$$

Questão 2: (2.0 pontos)

(a) [1.5] Determine a série de Fourier em **cossenos** da função

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 - x. \end{aligned}$$

(b) [0.5] Determine o valor da soma

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}.$$

Solução:

A série de Fourier em cossenos de f é

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\pi x),$$

onde, pela fórmula de Euler-Fourier, temos, para todo $m > 0$,

$$\begin{aligned} b_m &= 2\int_0^1 (1-x)\cos(m\pi x)dx \\ &= \left[\frac{2}{m\pi}(1-x)\text{sen}(m\pi x)\right]_0^1 + \frac{2}{m\pi}\int_0^1 \text{sen}(m\pi x)dx \\ &= \left[\frac{-2}{m^2\pi^2}\cos(m\pi x)\right]_0^1 \\ &= \frac{2(1-(-1)^m)}{m^2\pi^2}, \end{aligned}$$

e

$$b_0 = 2\int_0^1 (1-x)dx = \left[2x - x^2\right]_0^1 = 1.$$

Daí,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^m)}{m^2\pi^2}\cos(m\pi x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)^2\pi^2}\cos((2m+1)\pi x).$$

Como a extensão par da função f ao intervalo $[-1,1]$ é contínua em 0, pelo teorema de convergência de Fourier,

$$1 = f(0) = \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)^2\pi^2}.$$

Daí,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Questão 3: (2.0 pontos)

Encontre as autofunções e autovalores do problema

$$\begin{cases} y'' - 2y' = \lambda y, \\ y(0) = y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Solução:

O polinômio característico da equação é

$$r^2 - 2r - \lambda = (r-1)^2 - (1+\lambda).$$

Chame $\alpha = 1 + \lambda$. Temos 3 casos:

1: $\alpha > 0$. Nesse caso, $r = 1 \pm \sqrt{\alpha}$. A solução geral é

$$y = e^x(A\cosh(\sqrt{\alpha}x) + B\text{senh}(\sqrt{\alpha}x)).$$

Como $y(0) = 0$, $A = 0$. Como $y(2\pi) = 0$, $e^{2\pi}B\text{senh}(2\pi\sqrt{\alpha}) = 0$ e como $e^{2\pi}\text{senh}(2\pi\sqrt{\alpha}) \neq 0$, $B = 0$. Segue que só existem soluções triviais e então não há autovalores positivos.

2: $\alpha = 0$. Nesse caso, $r = 1$ e a solução geral é

$$y = e^x(A + Bx).$$

Como $y(0) = 0$, $A = 0$. Como $y(2\pi) = 0$, $e^{2\pi}B\,2\pi = 0$, e então $B = 0$. Segue que só existe a solução trivial e então 0 não é autovalor.

3: $\alpha < 0$. Nesse caso, $r = 1 \pm i\sqrt{|\alpha|}$. A solução geral é

$$y = e^x(A\cos(\sqrt{|\alpha|}x) + B\text{sen}(\sqrt{|\alpha|}x)).$$

Como $y(0) = 0$, $A = 0$. Como $y(2\pi) = 0$, $B\text{sen}(2\pi\sqrt{|\alpha|}) = 0$. Segue que tem soluções não triviais se, e somente se, $\text{sen}(2\pi\sqrt{|\alpha|}) = 0$. Isto é, se e somente se

$$2\pi\sqrt{|\alpha|} = m\pi,$$

para m inteiro e positivo. Os valores negativos de α são então

$$\alpha_m = -\frac{m^2}{4},\ m \in \mathbb{N},$$

e as autofunções correspondentes são

$$y_m(x) = e^x\text{sen}\left(\frac{mx}{2}\right),\ m \in \mathbb{N}.$$

Segue que os autovalores e autofunções do problema são

$$\lambda_m = -\left(1 + \frac{m^2}{4}\right),\ f_m(x) = e^x\text{sen}\left(\frac{mx}{2}\right),\ m \in \mathbb{Z}, m > 0.$$

Questão 4: (3.0 pontos)

Determine a solução $u(x,t)$ do problema

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = 4u(x,t) + u_{tt}(x,t) & x \in (0,1), t \in (0,\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = x(1-x) & x \in [0,1], \\ u_t(x,0) = 0 & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Solução:

Substituindo $u(x,t) = X(x)T(t)$ na equação para u, temos

$$\begin{aligned} X''(x)T(t) &= 4X(x)T(t) + X(x)T''(t), \\ \Rightarrow \qquad \frac{X''(x)}{X(x)} &= 4 + \frac{T''(t)}{T(t)}. \end{aligned}$$

Como o lado esquerda é independente de t, e como o lado direita é independente de x, os dois são constante. Existe então $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} X'' &= \lambda X, \\ T'' &= (\lambda - 4)T. \end{aligned}$$

Substituindo $u(x,t) = X(x)T(t)$ nos condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} X(0)T(t) &= u(0,t) = 0, \\ X(1)T(t) &= u(1,t) = 0. \end{aligned}$$

Daí

$$X(0) = X(1) = 0,$$

e temos que solucionar o problema de autovalors com condições de contorno seguinte.

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

Tem 3 casos.

1: $\lambda > 0$ - a solução geral é

$$X(x) = A\cosh(\sqrt{\lambda}x) + B\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x).$$

Como $X(0) = 0$, $A = 0$. Como $X(1) = 0$, $B\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}) = 0$ e como $\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}) \neq 0$, $B = 0$. Segue que só existem soluções triviales e então não há autovalores positivas.

2: $\lambda = 0$ - a solução geral é

$$X(x) = A + Bx.$$

Como $X(0) = 0$, $A = 0$ e como $X(1) = 0$, $B = 0$. Segue que só existe a solução trivial e então 0 não é autovalor.

3: $\lambda < 0$: A solução geral é

$$X(x) = A\cos(\sqrt{|\lambda|}x) + B\mathrm{sen}(\sqrt{|\lambda|}x).$$

Como $X(0) = 0$, $A = 0$. Como $X(1) = 0$, $B\mathrm{sen}(\sqrt{|\lambda|}) = 0$. Segue que tem soluções não triviales se e somente se $\mathrm{sen}(\sqrt{|\lambda|}) = 0$. Istó é, se e somente se

$$\sqrt{|\lambda|} = m\pi,$$

para m inteiro e positivo. Os autovalores negativas são então

$$\lambda_m = -m^2\pi^2,\ m \in \mathbb{N},$$

e as autofunções correspondentes são

$$X_m(x) = \text{sen}(m\pi x),\ m \in \mathbb{N}.$$

Substitindo isso na equação para T, temos

$$T''_m(t) = -(4 + m^2\pi^2)T(t),$$

e a solução dessa equação é

$$T_m(t) = a_m\text{sen}(\sqrt{4+m^2\pi^2}t) + b_m\cos(\sqrt{4+m^2\pi^2}t).$$

Segue que a solução geral é

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen}(m\pi x)\left(a_m\text{sen}(\sqrt{4+m^2\pi^2}t) + b_m\cos(\sqrt{4+m^2\pi^2}t)\right) \\ u_t(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{4+m^2\pi^2}\,\text{sen}(m\pi x)\left(a_m\cos(\sqrt{4+m^2\pi^2}t) - b_m\text{sen}(\sqrt{4+m^2\pi^2}t)\right). \end{aligned}$$

Substituindo as condições iniciais, temos

$$x(1-x) = u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m\text{sen}(m\pi x),$$

e

$$0 = u_t(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{4+m^2}a_m\text{sen}(m\pi x).$$

Segue que $a_m = 0$ para todo m, e, pelo fórmula de Euler-Fourier para séries de Fourier em senos, para todo m,

$$\begin{aligned} b_m &= 2\int_0^1 (x-x^2)\text{sen}(m\pi x)dx \\ &= \left[\frac{-2}{m\pi}(x-x^2)\cos(m\pi x)\right]_0^1 + \frac{2}{m\pi}\int_0^1 (1-2x)\cos(m\pi x)dx \\ &= \left[\frac{2}{m^2\pi^2}(1-2x)\text{sen}(m\pi x)\right]_0^1 + \frac{4}{m^2\pi^2}\int_0^1 \text{sen}(m\pi x)dx \\ &= \left[\frac{-4}{m^3\pi^3}\cos(m\pi x)\right]_0^1 \\ &= \frac{4(1-(-1)^m)}{m^3\pi^3}, \end{aligned}$$

e a solução é,

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^m)}{m^3\pi^3}\text{sen}(m\pi x)\cos(\sqrt{4+m^2\pi^2}t).$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>0$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>0$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-\ldots-f^{(m-1)}(0)$

Integrais úteis.

$$\int x^m\cos(\alpha x)dx = \frac{x^m}{\alpha}\operatorname{sen}(\alpha x)-\frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\operatorname{sen}(\alpha x)dx$$
$$\int x^m\operatorname{sen}(\alpha x)dx = -\frac{x^m}{\alpha}\cos(\alpha x)+\frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\cos(\alpha x)dx$$

O problema

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=0, y(L)=0 \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, $n\in\mathbb{N}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$