TEMPO DE PROVA: 2h

**Questão 1:** (3.0 pontos)
Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = g(t), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

onde $g : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$g(t) = \begin{cases} 6e^t \text{ se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \text{ se } t > 1. \end{cases}$$

**Solução:**
Aplicando a transformada de Laplace temos

$$\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] - 3\left[sY(s) - y(0)\right] + 2Y(s) = H(s),$$

onde $H(s)$ e $Y(s)$ são, respetivamente, as transformadas de $h(t)$ e $y(t)$. Assim tem-se a relação

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = H(s),$$

de onde segue a igualdade

$$Y(s) = \frac{H(s)}{s^2 - 3s + 2} = \frac{H(s)}{(s-1)(s-2)}.$$

Para calcular $H(s)$ observamos que $h(t)$ pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} h(t) &= 6e^t - 6u_1(t)e^t \\ &= 6e^t - 6u_1(t)e^{(t-1)+1}; \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathcal{L}\left\{6e^t\right\}(s) - \mathcal{L}\left\{6u_1(t)e^{(t-1)+1}\right\}(s) \\ &= \frac{6}{s-1} - e^{-s}\mathcal{L}\left\{6e^{t+1}\right\}(s) \\ &= \frac{6}{s-1} - e^{-s}\mathcal{L}\left\{6e \cdot e^t\right\}(s) \\ &= \frac{6}{s-1} - e^{-s}\frac{6e}{s-1} \\ &= \frac{6}{s-1}\left(1 - e^{1-s}\right). \end{aligned}$$

consequentemente, podemos concluir que

$$Y(s) = \frac{6}{(s-1)^2(s-2)}\left(1 - e^{1-s}\right).$$

Pondo

$$G(s) = \frac{6}{(s-1)^2(s-2)}$$

temos então que

$$Y(s) = G(s) - e^{1-s}G(s).$$

Logo, se $g(t) := \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t)$ temos que

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{e \cdot e^{-s}G(s)\right\}(t) = g(t) - eu_1(t)g(t-1).$$

Só resta calcular $g(t)$. Para isso, escrevemos $G(s)$ em frações simples, ou seja,

$$G(s) = \frac{6}{(s-1)^2(s-2)} = \frac{6}{s-2} - \frac{6}{s-1} - \frac{6}{(s-1)^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s-2} - \frac{6}{s-1} - \frac{6}{(s-1)^2}\right\}(t) \\ &= 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} \\ &= 6e^{2t} - 6e^{t} - 6te^{t}. \end{aligned}$$

**Questão 2:** (2.5 pontos)

Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 \text{ se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier em cossenos de $f$.

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item $(a)$ no intervalo $[0, 6]$.

(c) Calcule o valor da série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\kappa}}{2\kappa + 1}.$$

**Solução:**

(a) A série de Fourier em cossenos de $f$ é dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right),$$

onde

$$a_0 = \int_0^2 f(x)dx = \int_1^2 dx = 1,$$

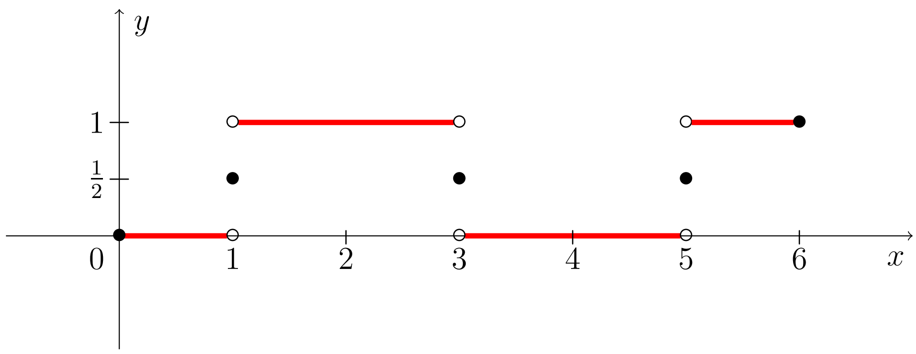
e, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n = \int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx &= \int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx \\ &= \left[\frac{2}{n\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_1^2 \\ &= \frac{2}{n\pi}\text{sen}(n\pi) - \frac{2}{n\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{2}{n\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Daí obtemos que a série de Fourier de $f$ é dada pela expressão:

$$\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

(b) O gráfico da série de Fourier obtida no item (a), no intervalo $[0,6]$, é o seguinte:




(c) Como a extensão par de $f$ é continua em $x = 0$, segue do Teorema de Convergência de Fourier que

$$\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = f(0) = 0,$$

de onde decorre a igualdade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Usando as igualdades

$$\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2\kappa, \\ (-1)^\kappa & \text{se } n = 2\kappa + 1. \end{cases}$$

obtemos então que

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{(2\kappa+1)} = \frac{\pi}{4}.$$

**Questão 3:** (2.0 pontos)

Encontre as autofunções e autovalores do problema

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' = \lambda y, \\ y(1) = y(2) = 0. \end{cases}$$

*(Dica: use a equação de Euler.)*

**Solução:**

Procuramos soluções da forma $y = x^r$. Derivando $y$ temos

$$y' = rx^{r-1} \quad \text{e} \quad y'' = r(r-1)^{r-2}.$$

Substituindo na equação obtemos as relações

$$r(r-1)x^r + rx^r = \lambda x^r \Leftrightarrow (r^2 - \lambda)x^r = 0 \Leftrightarrow r^2 - \lambda = 0.$$

Há três possibilidades:

(a) $\boldsymbol{\lambda > 0}$. Nesse caso, a solução geral é dada pela expressão

$$y(x) = ax^{\sqrt{\lambda}} + bx^{-\sqrt{\lambda}}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

As condições de contorno impõem as igualdades

$$y(1) = a + b = 0,$$
$$y(2) = a2^{\sqrt{\lambda}} + b2^{-\sqrt{\lambda}} = 0,$$

de onde temos que

$$(2^{\sqrt{\lambda}} - 2^{-\sqrt{\lambda}})a = (2^{\sqrt{\lambda}} - 2^{-\sqrt{\lambda}})b = 0.$$

Ou seja, não há soluções não-triviais e consequentemente não há autovalores positivos.

(b) $\boldsymbol{\lambda = 0}$. Nesse caso, a solução geral é dada por

$$y(x) = ax\ln(x) + bx, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Usando as condições de contorno tem-se

$$y(1) = b = 0,$$
$$y(2) = 2\ln(2)a = 0,$$

logo $a = b = 0$. Portanto, que não há soluções não-triviais e 0 não é autovalor.

(c) $\boldsymbol{\lambda < 0}$. Nesse caso, a solução geral é dada por

$$y(x) = a\cos(\sqrt{|\lambda|}\ln(x)) + b\text{sen}(\sqrt{|\lambda|}\ln(x)) \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

As condições de contorno impõem as seguintes restrições:

$$y(1) = a = 0,$$
$$y(2) = b\text{sen}(\sqrt{|\lambda|}\ln(2)) = 0.$$

Portanto, existem soluções não-triviais se, e somente se, $\sqrt{|\lambda|}\ln(2) = n\pi$, por $n$ inteiro positivo. Assim, as autovalores são

$$\lambda_n = -\Big(\frac{n\pi}{\ln(2)}\Big)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e as autofunções correspondentes são dadas por

$$y_n(x) = \text{sen}(n\pi \ln(x)/\ln(2)).$$

**Questão 4:** (2.5 pontos)

Determine a solução $u(x,t)$ do problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = 4u_{xx}(x,t) & x \in (0,\pi), t \in (0,\infty), \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x) & x \in (0,\pi), \end{cases}$$

onde

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } 0 \leq x \leq \pi/4, \\ 1 \text{ se } \pi/4 < x \leq 3\pi/4, \\ 0 \text{ se } 3\pi/4 < x \leq \pi. \end{cases}$$

**Solução:**

Aplicamos o método de separação de variáveis. Escrevemos então

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Substituindo na equação, obtemos

$$X(x)T'(t) = 4X''(x)T(t) \Longleftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{4T(t)}.$$

Como na última igualdade o lado esquerdo não depende de $t$ e o lado direito não depende de $x$, ambos deverão ser iguais a uma constante real, que chamaremos de $\lambda$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{4T(t)} = \lambda,$$

de onde obtemos as equações

$$X''(x) = \lambda X(x) \quad \text{e} \quad T'(t) = 4\lambda T(t).$$

Usando agora as condições de contorno temos que

$$X'(0)T(t) = 0 \ \forall t > 0; \quad \text{portanto } X'(0) = 0,$$

e

$$X'(\pi)T(t) = 0 \ \forall t > 0; \quad \text{portanto } X'(\pi) = 0.$$

Como temos duas condições de contorno em $X$, procuramos soluções do problema de autovalores

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \\ X'(0) = 0 \text{ e } X'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Aplicando a fórmula com $L = \pi$, vemos que os autovalores de esse problema são $\lambda_m = -m^2$, $m \in \{0, 1, 2, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$\begin{cases} X_0(x) \ = 1, \\ X_m(x) = \cos(mx), \ m \geq 1. \end{cases}$$

Resolvendo a correspondente equação de $T$ temos que

$$T_m'(t) = -4m^2 T(t); \quad \text{logo } T_m(t) = a_m e^{-4m^2 t}.$$

Daí, a solução geral é dada por

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-4m^2 t} \cos(mx).$$

Usando agora as condições iniciais deverá ser satisfeita a relação

$$u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(mx) = g(x).$$

Assim, pelas fórmulas de Euler-Fourier para séries de Fourier em cossenos tem-se

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} dx \\ &= 1, \\ a_m &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cos(mx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos(mx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{m} \operatorname{sen}(mx) \right]_{\pi/4}^{3\pi/4} \\ &= \frac{2}{m\pi} \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{3m\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{4}\right) \right] \\ &= \frac{4}{m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Finalmente obtemos a solução:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{m\pi} e^{-4m^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cos(mx).$$

**Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.**

**FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!**

**A : Para $a = \lambda + i\mu$ complexo, e para $x$ real positivo,**

$$x^a = x^\lambda \cos(\mu \log(x)) + i x^\lambda \mathrm{sen}(\mu \log(x)).$$

**B : O problema**

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y'(0) = 0, y'(L) = 0, \end{cases}$$

**tem autovalores $\lambda = -n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são**

$$\begin{cases} y_0(x) = 1, \\ y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ n \geq 1. \end{cases}$$

**C : Transformadas de Laplace elementares.**

| $f$ | $\mathcal{L}[f]$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}, \ s > 0$ |
| $t^m \ (m \in \mathbb{N})$ | $\frac{m!}{s^{m+1}}, \ s > 0$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}, \ s > a$ |
| $t^m e^{at} \ (m \in \mathbb{N})$ | $\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, \ s > a$ |
| $\mathrm{sen}(at)$ | $\frac{a}{s^2+a^2}, \ s > 0$ |
| $\cos(at)$ | $\frac{s}{s^2+a^2}, \ s > 0$ |
| $e^{at}\mathrm{sen}(bt)$ | $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$ |
| $e^{at}\cos(bt)$ | $\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$ |
| $\mathrm{senh}(at)$ | $\frac{a}{s^2-a^2}, \ s > \|a\|$ |
| $\cosh(at)$ | $\frac{s}{s^2-a^2}, \ s > \|a\|$ |
| $\delta(t-a)$ | $e^{-as}$ |
| $u_a(t)f(t-a)$ | $e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$ |
| $e^{at}f$ | $\mathcal{L}[f](s-a)$ |
| $f^{(m)}(t)$ | $s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$ |