TEMPO DE PROVA: 2h

Questão 1: (3.0 pontos)

Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = g(t), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

onde $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$g(t) = \begin{cases} 6e^t \text{ se } 0 \le t \le 1 \\ 0 \text{ se } t > 1. \end{cases}$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } 0 \le x \le 1, \\ 1 \text{ se } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier em cossenos de f.

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo $[0, 6]$.

(c) Calcule o valor da série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\kappa}}{2\kappa + 1}.$$

Questão 3: (2.0 pontos)

Encontre as autofunções e autovalores do problema

$$\begin{cases} x^2 y'' + x y' = \lambda y, \\ y(1) = y(2) = 0. \end{cases}$$

(Dica: use a equação de Euler.)

Questão 4: (2.5 pontos)

Determine a solução $u(x, t)$ do problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = 4u_{xx}(x,t) & x \in (0,\pi), t \in (0,\infty), \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x) & x \in (0,\pi), \end{cases}$$

onde

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } 0 \le x \le \pi/4, \\ 1 \text{ se } \pi/4 < x \le 3\pi/4, \\ 0 \text{ se } 3\pi/4 < x \le \pi. \end{cases}$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A : Para $a = \lambda + i\mu$ complexo, e para x real positivo,

$$x^a = x^\lambda \cos(\mu \log(x)) + i x^\lambda \operatorname{sen}(\mu \log(x)).$$

B : O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y'(0) = 0, y'(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$\begin{cases} y_0(x) = 1, \\ y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ n \geq 1. \end{cases}$$

C : Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
t^m $(m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}}$, $s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$
$t^m e^{at}$ $(m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}$, $s > a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$, $s > \|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$, $s > \|a\|$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$