



Segunda Prova Unificada de Cálculo IV - 2025/2, 13/11/2025

Questão 1:(2,5 pontos) Determine todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ (e todas as soluções correspondentes), para os quais existem soluções não-nulas do problema de valor de contorno:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

Questão 2:(2,5 pontos) Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2M$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} M + x, & \text{se } -M \leq x < 0, \\ M - x, & \text{se } 0 \leq x \leq M. \end{cases}$$

- (a) Determine a expansão em série de Fourier de $f(x)$.
- (b) Usando o Teorema de Fourier e calculando a série obtida no item anterior em $x = 0$, mostre que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Questão 3:(2,5 pontos) Considere o seguinte problema de valor inicial e de contorno para a equação do calor:

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx}, & 0 < x < 4, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 20, & t > 0, \\ u(4, t) = 10, & t > 0, \\ u(x, 0) = 20 - \frac{5}{2}x + \sin(2\pi x), & 0 < x < 4. \end{cases}$$

- (a) Determine a distribuição de temperatura estado estacionário $v(x)$.
- (b) Defina $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$. Mostre que $w(x, t)$ satisfaz um problema de valor inicial e de contorno com condições de contorno homogêneas e determine este novo problema.
- (c) Usando o método de separação de variáveis, determine a solução $w(x, t)$ do problema formulado no item (b) e, conseqüentemente, a solução $u(x, t)$ do problema original.

Questão 4:(2,5 pontos)

Encontre todas as soluções não nulas u da forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$ da equação:

$$u_x + u_y = (x^2 - y^2)u.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A. Tabela resumo para EDO $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0$ de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ e } r_1 \neq r_2 &\implies y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}. \\ r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ e } r_1 = r_2 &\implies y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{r_1 x}. \\ r_1 = \alpha + \beta i \text{ e } r_2 = \alpha - \beta i &\implies y(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)), \end{aligned}$$

onde r_1 e r_2 são as raízes da equação característica $ar^2 + br + c = 0$.

B. O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2 \pi^2 / L^2$, $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$