TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (2 pontos)

Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \cos(1/m)$.

Solução:
O m-esimo termo é

$$a_m := (-1)^m \cos(1/m).$$

Nota-se que

$$\lim_{m\to\infty}|a_m| = \lim_{m\to\infty}\cos(1/m) = 1 \neq 0.$$

Em particular, (a_m) não converge até zero. Segue então pelo *teste de divergência* que essa série é *divergente*.

(b) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\sqrt{m^2-1}}{m^2+3}$.

Solução:
Trate-se de uma série alternada com m-esimo termo $(-1)^m a_m$, onde

$$a_m := f(m) := \frac{\sqrt{m^2-1}}{m^2+3}.$$

Derivando f, obtemos

$$f'(x) = \frac{x(5-x^2)}{(x^2+3)^2\sqrt{x^2-1}}.$$

Segue que $f'(x) < 0$ em $[3,\infty[$ e (a_m) é decrescente para $m \geqslant 3$.

$$\lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{m^2-1}}{m^2+3} = \lim_{m\to\infty}\frac{1-1/m^2}{m(1+3/m)} = 0.$$

Segue pelo *teste da série alternada* que essa série é *convergente*.
A sua śerie de valores absolutos é

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sqrt{m^2-1}}{m^2+3},$$

com m-esimo termo

$$a_m := \frac{\sqrt{m^2-1}}{m^2+3}.$$

Comparando com a séria harmonica, cujo m-esimo termo é $b_m := 1/m$, obtemos

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{b_m} = \lim_{m\to\infty}\frac{m\sqrt{m^2-1}}{m^2+3} = \lim_{m\to\infty}\frac{1-1/m^2}{(1+3/m)} = 1.$$

Como esse limite existe, é finito, e é diferente de zero, e como a série harmonica é divergente, segue pelo *teste de comparação no limite* que a série de valores absolutos é *divergente*. Concluímos que a série é *condicionalmente convergente*.

(c) $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m\mathrm{Ln}(m)^2}$.

Solução:
O m-esimo termo dessa série é

$$a_m := f(m) := \frac{1}{m\mathrm{Ln}(m)^2}.$$

Nota-se que f é positiva em $[2, \infty[$ e, como seu denominador é crescente, é decrescente.

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} f(x)dx &= \lim_{T\to\infty} \int_2^T \frac{1}{x\mathrm{Ln}(x)^2}dx \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_{\mathrm{Ln}(2)}^{\mathrm{Ln}(T)} \frac{1}{y^2}dy \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[\frac{-1}{y}\right]_{\mathrm{Ln}(2)}^{\mathrm{Ln}(T)} \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\mathrm{Ln}(2)} - \frac{1}{\mathrm{Ln}(T)} \\
&= \frac{1}{\mathrm{Ln}(2)}.
\end{aligned}$$

Como essa integral converge, segue pelo *teste da integral* que essa série é convergente.

Questão 2: (2 pontos)
Considere a série de potências

$$f(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x-2)^m}{2^m(3m+1)}.$$

(a) Determine o intervalo de convergência desta série.

Solução:
Trate-se de uma série *centrada* em $c = 2$ com m-esimo termo

$$a_m := \frac{(-1)^m (x-2)^m}{2^m(3m+1)}$$

Determinamos o seu raio de convergência.

$$\lim_{m\to\infty} \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \lim_{m\to\infty} \left|\frac{(x-2)^{m+1}2^m(3m+1)}{(x-2)^m 2^{m+1}(3m+4)}\right| = \lim_{m\to\infty} \left|\frac{(x-2)(3+1/m)}{2(3+4/m)}\right| = \frac{|x-2|}{2}.$$

Segue pelo *teste da razão* que essa série é convergente para $|x-2| < 2$ e divergente para $|x-2| > 2$. O seu *raio de convergência* é então $R = 2$.
Estudamos as extremidades do intervalo de convergência. Em $x = (c-R) = (2-2) = 0$, a série é

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(3m+1)},$$

com m-esimo termo

$$a_m := \frac{1}{(3m+1)}.$$

Comparamos essa série com a série harmônica, cujo m-esimo termo é $b_m := 1/m$.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_m}{b_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{m}{(3m+1)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{3+1/m} = \frac{1}{3}.$$

Como esse limite existe, é finito, e é diferente de zero, e como a série harmônica é divergente, segue pelo *teste de comparação no limite* que essa série é *divergente*.
Em $x = (c+R) = (2+2) = 4$, a série é

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(3m+1)}$$

Trate-se de uma série alternada com m-esimo termo $(-1)^m a_m$, onde

$$a_m = \frac{1}{(3m+1)}.$$

Como (a_m) é decresente e converge até zero quando m vai por infinito, segue pelo *teste da série alternada* que essa série é *convergente*. Concluímos que o *intervalo de convergência* da série é $]0,4]$.

(b) Determine $f^{(5)}(2)$, a quinta derivada de f em 2.

Solução:
Pelo Teorema de Taylor
$$f^{(5)}(2) = 5!a_5 = 120a_5,$$
onde a_5 é o coeficiente de x^5 na série de Taylor de f. Segue que
$$f^{(5)}(2) = \frac{120 \cdot (-1)^5}{2^5 \cdot (3 \cdot 5 + 1)} = -\frac{15}{64}.$$

Questão 3: (3 pontos)

Considere a equação diferencial :

$$(x^2 - 2x + 2)y'' + 2(x - 1)y' + y = 0.$$

(a) Mostre que $x_0 = 1$ é ponto ordinário desta equação.

Solução:
A equação é

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} P(x) &:= (x^2 - 2x + 2), \\ Q(x) &:= 2(x - 1), \text{ e} \\ R(x) &:= 1. \end{aligned}$$

Como

$$P(1) = 1 \neq 0,$$

o ponto $x_0 = 1$ é *ponto ordinário* da equação.

(b) Determine a relação de recorrência da solução em séries desta equação em torno deste ponto.

Solução:
Substituimos $t = x - 1$. Como

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx},$$

a equation é

$$(t^2 + 1)\ddot{y} + 2t\dot{y} + y = 0.$$

Procuramos soluções da forma

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m.$$

Derivando essa série duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \sum_{m=1}^{\infty} m a_m t^{m-1}, \text{ e} \\ \ddot{y} &= \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m t^{m-2}. \end{aligned}$$

Substituindo essas séries na equation, obtemos

$$
\begin{aligned}
& (t^2+1)\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m t^{m-2} + 2t\sum_{m=1}^{\infty} m a_m t^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m = 0 \\
\Rightarrow\quad & \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m t^m + \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m t^{m-2} + \sum_{m=1}^{\infty} 2m a_m t^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m = 0 \\
\Rightarrow\quad & \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m t^m + \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2} t^m + \sum_{m=1}^{\infty} 2m a_m t^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m = 0 \\
\Rightarrow\quad & \sum_{m=2}^{\infty} \big((m^2+m+1)a_m + (m+2)(m+1)a_{m+2}\big)t^m + (3a_1+6a_3)t + (a_0+2a_2) = 0.
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema de Taylor, todos os coeficientes do lado esquerdo são iguais a zero. Segue que

$$
\begin{aligned}
a_0 + 2a_2 &= 0, \\
3a_1 + 6a_3 &= 0, \text{ e} \\
(m^2+m+1)a_m + (m+2)(m+1)a_{m+2} &= 0 \ \forall m \geqslant 2.
\end{aligned}
$$

A relação de recorrência é então

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2}, \\
a_3 &= -\frac{a_1}{2}, \text{ e} \\
a_{m+2} &= -\frac{(m^2+m+1)a_m}{(m+1)(m+2)} \ \forall m \geqslant 2.
\end{aligned}
$$

Questão 4: (3 pontos)

Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do seguinte problema de valor inícial.

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = u_{\frac{\pi}{2}}(x)\cos(x) \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1 \end{cases}$$

onde $u_{\frac{\pi}{2}}(x)$ é a função degrau unitário com singularidade em $\frac{\pi}{2}$.

Solução:

Determinamos a transformada de Laplace do termo inhomogêneo.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_{\frac{\pi}{2}}(x)\cos(x)] &= \mathcal{L}[u_{\frac{\pi}{2}}(x)\cos((x-\pi/2)+\pi/2)] \\ &= \mathcal{L}[-u_{\frac{\pi}{2}}(x)\text{sen}(x-\pi/2)] \\ &= -e^{-\pi s/2}\mathcal{L}[\text{sen}(x)] \\ &= \frac{-e^{-\pi s/2}}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Laplace à equação, obtemos

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}[y'' - 2y' + 2y] &&= \mathcal{L}[u_{\frac{\pi}{2}}\cos(x)] \\ \Rightarrow &\mathcal{L}[y''] - 2\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] &&= \frac{-e^{-\pi s/2}}{s^2+1} \\ \Rightarrow &(-y'(0) - sy(0) + s^2\mathcal{L}[y]) - 2(-y(0) + s\mathcal{L}[y]) + 2\mathcal{L}[y] &&= \frac{-e^{-\pi s/2}}{s^2+1} \\ \Rightarrow &(s^2 - 2s + 2)\mathcal{L}[y] - 1 &&= \frac{-e^{-\pi s/2}}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Segue que

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2-2s+2} - \frac{e^{-\pi s/2}}{(s^2-2s+2)(s^2+1)}.$$

Aplicamos a técnica de frações parciais ao fator racional do segundo termo do lado direito.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s^2-2s+2)(s^2+1)} &= \frac{as+b}{(s^2-2s+2)} + \frac{cs+d}{(s^2+1)} \\ &= \frac{(as+b)(s^2+1) + (cs+d)(s^2-2s+2)}{(s^2-2s+2)(s^2+1)} \\ &= \frac{(a+c)s^3 + (b-2c+d)s^2 + (a+2c-2d)s + (b+2d)}{(s^2-2s+2)(s^2+1)} \end{aligned}$$

Comparando coeficientes, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} a + c &= 0, \\ b - 2c + d &= 0, \\ a + 2c - 2d &= 0, \text{ e} \\ b + 2d &= 1, \end{aligned}$$

com solução

$$a = \frac{-2}{5},\ b = \frac{3}{5},\ c = \frac{2}{5},\ \text{e}\ d = \frac{1}{5}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(s^2-2s+2)(s^2+1)} &= \frac{-2s+3}{5(s^2-2s+2)} + \frac{2s+1}{5(s^2+1)} \\
&= \frac{-2(s-1)}{5((s-1)^2+1)} + \frac{1}{5((s-1)^2+1)} + \frac{2s}{5(s^2+1)} + \frac{1}{5(s^2+1)} \\
&= \mathcal{L}\left[-\frac{2}{5}e^x\cos(x)\right] + \mathcal{L}\left[\frac{1}{5}e^x\operatorname{sen}(x)\right] + \mathcal{L}\left[\frac{2}{5}\cos(x)\right] + \mathcal{L}\left[\frac{1}{5}\operatorname{sen}(x)\right] \\
&= \mathcal{L}[g(x)],
\end{aligned}$$

onde

$$g(x) = -\frac{2}{5}e^x\cos(x) + \frac{1}{5}e^x\operatorname{sen}(x) + \frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(x).$$

Segue que

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{(s-1)^2+1} - e^{-\pi s/2}\mathcal{L}[g(x)] = \mathcal{L}[e^x\operatorname{sen}(x)] - \mathcal{L}[u_{\frac{\pi}{2}}(x)g(x-\pi/2)].$$

Concluímos que

$$y(x) = e^x\operatorname{sen}(x) - u_{\frac{\pi}{2}}(x)g(x-\pi/2).$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A - Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$t^m e^{at}\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s>a$
$\mathrm{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\mathrm{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$\mathrm{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$\delta_a(t)f(t)$	$e^{-as}f(a)$
$u_a(t)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-...-f^{(m-1)}(0)$