



TEMPO DE PROVA: 2h30

**Questão 1:** (2 pontos)

Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo.

(a)  $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cos(1/m).$

(b)  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \sqrt{m^2 - 1}}{m^2 + 3}.$

(c)  $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m \ln(m)^2}.$

**Questão 2:** (2 pontos)

Considere a série de potências

$$f(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x-2)^m}{2^m (3m+1)}.$$

(a) Determine o intervalo de convergência desta série.

(b) Determine  $f^{(5)}(2)$ , a quinta derivada de  $f$  em 2.

**Questão 3:** (3 pontos)

Considere a equação diferencial :

$$(x^2 - 2x + 2)y'' + 2(x-1)y' + y = 0.$$

(a) Mostre que  $x_0 = 1$  é ponto ordinário desta equação.

(b) Determine a relação de recorrência da solução em séries desta equação em torno deste ponto.

**Questão 4:** (3 pontos)

Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do seguinte problema de valor inicial.

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = u_{\frac{\pi}{2}}(x) \cos(x) \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

onde  $u_{\frac{\pi}{2}}(x)$  é a função degrau unitário com singularidade em  $\frac{\pi}{2}$ .

**Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.**

**FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!**

**A - Transformadas de Laplace elementares.**

| $f$                             | $\mathcal{L}[f]$  |
|---------------------------------|---|
| 1                               | $\frac{1}{s}, s > 0$  |
| $t^m (m \in \mathbb{N})$        | $\frac{m!}{s^{m+1}}, s > 0$                                 |
| $e^{at}$                        | $\frac{1}{s-a}, s > a$                                      |
| $t^m e^{at} (m \in \mathbb{N})$ | $\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, s > a$                             |
| $\text{sen}(at)$                | $\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$                                |
| $\text{cos}(at)$                | $\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$                                |
| $e^{at}\text{sen}(bt)$          | $\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$                            |
| $e^{at}\text{cos}(bt)$          | $\frac{(s-a)}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$                        |
| $\text{senh}(at)$               | $\frac{a}{s^2 - a^2}, s >  a $                              |
| $\text{cosh}(at)$               | $\frac{s}{s^2 - a^2}, s >  a $                              |
| $\delta_a(t)f(t)$               | $e^{-as}f(a)$   |
| $u_a(t)$                        | $\frac{1}{s}e^{-as}$  |
| $u_a(t)f(t-a)$                  | $e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$                                  |
| $e^{at}f$                       | $\mathcal{L}[f](s-a)$                                       |
| $f^{(m)}(t)$                    | $s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - \dots - f^{(m-1)}(0)$ |