UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito da Primeira Prova Unificada de Cálculo IV - 2019/2, 27/09/2019

Questão 1: (2,5 pontos) Determine a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo. Justifique.

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\ln n)^2}{n}, \quad \text{b)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}.$$

Solução:
a) Observe que a série dos valores absolutos diverge pois

$$\frac{\ln^2(n)}{n} \geq \frac{1}{n} \quad \forall\, n \geq 3,$$

e aplicamos o teste de comparação com a série harmônica $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ que diverge. Para estudar a série alternada, consideramos $b_n = \frac{\ln^2(n)}{n}$. Veja que por L'Hôspital

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Para estudar a monotonia da função $f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}$ calculamos a derivada da f

$$f'(x) = \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2}.$$

Observe que para $x > e^2$, $2 - \ln(x) < 0$, então f é decrescente em (e^2, ∞). segue que $b_{n+1} \leq b_n$ para $n \geq 8$. Pelo teste da série alternada a série converge. Logo a série é condicionalmente convergente.

b) 1° *via de Solução:* Observe que $2 < e$, segue que $2^{\ln n} < e^{\ln n} = n$ para $n \geq 2$, logo temos que $\frac{1}{2^{\ln n}} > \frac{1}{n}$ para $n \geq 2$. Portanto a série diverge pelo teste de comparação com a série harmônica $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$.

2° *via de Solução:* Observe que $2^{\ln n} = (e^{\ln 2})^{\ln n} = (e^{\ln n})^{\ln 2} = n^{\ln 2}$. Segue que $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln 2}}$. Como $1 < 2 < e$ e ln é uma função estritamente crescente então $0 < \ln 2 < \ln e = 1$. Mas a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln 2}}$ diverge porque é uma série p com $p = \ln 2 < 1$. Portanto a série diverge.

Questão 2: (2,5 pontos) Considere a série de potências

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-2)^{k+1}}{3^{k+1}(k+1)}\,.$$

a) Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série de potências acima.

b) Encontre explicitamente a função que representa a série no intervalo $(2-R, 2+R)$, onde R é o raio de convergência.(**Dica: derive a série uma vez**).

Solução:

a) Para determinar o raio de convergência da série usamos o critério da razão.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\left|(-1)^{k+2}\frac{(x-2)^{k+2}}{3^{k+2}(k+2)}\right|}{\left|(-1)^{k+1}\frac{(x-2)^{k+1}}{3^{k+1}(k+1)}\right|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|x-2|}{3}\frac{k+1}{k+2} = \frac{|x-2|}{3} < 1 \iff |x-2| < 3$$

logo o raio de convergência da série é $R = 3$. Então o domínio de convergência contém o intervalo $(-1, 5)$. No ponto $x = -1$ a série se torna

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1}\frac{(-3)^{k+1}}{3^{k+1}(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1},$$

a série harmônica, que diverge (é uma série p com p=1). Consideramos o extremo $x = 5$. A série se torna

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1}\frac{3^{k+1}}{3^{k+1}(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)},$$

a série harmônica alternada, que converge pelo teste da série alternada. Logo o domínio de convergência é $(-1, 5]$.

b) Seja $\varphi(x)$ uma função tal que

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1}\frac{(x-2)^{k+1}}{3^{k+1}(k+1)},$$

em $(-1, 5)$. Derivando termo a termo:

$$\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1}\frac{(x-2)^{k}}{3^{k+1}} = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k}\left(\frac{x-2}{3}\right)^k = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k,$$

onde $t = (x-2)/3$. Mas a última série é igual a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k = \frac{1}{1+t},$$

pois é a série geométrica de razão $-t$. Note que no intervalo $(-1, 5)$, temos que $|x-2| < 3$, logo $|t| < 1$, intervalo no qual a série geométrica converge. Então

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{3}\frac{1}{1+t} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-2}{3}} = -\frac{1}{x+1}.$$

Segue que $\varphi(x) = -\ln(x+1) + k$, k uma constante. Avaliando em $x = 2$, obtemos $k = \ln(3)$. Logo

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{(x-2)^{k+1}}{3^{k+1}(k+1)} = -\ln(x+1) + \ln(3) = \ln(\frac{3}{x+1}).$$

Questão 3: (2,5 pontos) Considere a equação diferencial ordinária:

$$3xy'' + y' + 2xy = 0.$$

a) Demonstre que $x = 0$ é um ponto singular regular dessa equação.

b) Determine as raízes da equação indicial da equação diferencial.

c) Determine a relação de recorrência da solução em série potências em torno de $x = 0$ associada **à maior das duas raízes** da equação indicial.

Solução:

a) A equação é

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

onde $P(x) = 3x$, $Q(x) = 1$ e $R(x) = 2x$. Como $P(0) = 0$, este ponto é ponto singular da equação.

Como os limites

$$p_0 = \lim_{x\to 0}\frac{xQ(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{3x} = \frac{1}{3},$$

$$q_0 = \lim_{x\to 0}\frac{x^2R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{3x} = 0,$$

existem e são finitos, este ponto é ponto singular regular da equação.

b) A equação indicial está definida por $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$. Logo $F(r) = r^2 - \frac{2}{3}r = r(r - \frac{2}{3})$ e as raízes desta equação são 0 e 2/3.

c) Para determinar relação de recorrência consideremos uma solução da forma

$$y(x) = x^{2/3}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2/3},$$

com $a_0 \neq 0$. As derivadas são

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2/3)a_n x^{n+2/3-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2/3)(n+2/3-1)a_n x^{n+2/3-2}.$$

Substituindo na equação:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+2/3)(n-1/3)a_n x^{n-1/3} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2/3)a_n x^{n-1/3} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+5/3} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+2/3)(n-1/3)a_n x^{n-1/3} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2/3)a_n x^{n-1/3} + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-2} x^{n-1/3} = 0,$$

$$5a_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(3n(n+2/3)a_n + 2a_{n-2}\right)x^{n-1/3} = 0.$$

A relação de recorrência associada a raíz $r = 2/3$ é $a_n = \frac{-2a_{n-2}}{3n(n+2/3)}$, para $n \geq 2$. Também observamos que é necessário ter $a_1 = 0$.

Questão 4: (2.5 pontos) Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 3y = u_1(t)e^{t-1} \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \end{cases}$$

onde $u_1(t)$ é a função degrau unitário com descontinuidade em 1.

Solução
Aplicando a Transformada de Laplace em ambos lados da equação,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' - 2y' + 3y\}(s) &= \mathcal{L}\{u_1(t)e^{t-1}\}(s), \\ (s^2 - 2s + 3)\mathcal{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0) - y(0) &= \frac{e^{-s}}{s-1}. \end{aligned}$$

Pelas condições iniciais e o método de frações simples obtemos

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{e^{-s}}{(s-1)(s^2 - 2s + 3)} = \frac{1}{2}\frac{e^{-s}}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{e^{-s}(s-1)}{s^2 - 2s + 3}.$$

Usando a tabela de transformadas, podemos observar também que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s-1}\right) = u_1(t)e^{t-1}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}(s-1)}{s^2 - 2s + 3}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-s}\frac{(s-1)}{(s-1)^2 + 2}\right) = u_1(t)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(s-1)}{(s-1)^2 + 2}\right)(t-1) \\ &= u_1(t)e^{t-1}cos(\sqrt{2}\,(t-1)). \end{aligned}$$

Por tanto a solução procurada é

$$y(t) = \frac{1}{2}u_1(t)e^{t-1} - \frac{1}{2}u_1(t)e^{t-1}cos(\sqrt{2}\,(t-1)) = \frac{1}{2}u_1(t)e^{t-1}(1 - cos(\sqrt{2}\,(t-1)).$$

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$t^m e^{at}\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s>a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-...-f^{(m-1)}(0)$