UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Primeira Prova Unificada de Cálculo IV - 2019/2, 27/09/2019

Questão 1: (2,5 pontos) Determine a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo. Justifique.

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\ln n)^2}{n}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}.$$

Questão 2: (2,5 pontos) Considere a série de potências

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-2)^{k+1}}{3^{k+1}(k+1)} \, .$$

a) Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série de potências acima.

b) Encontre explicitamente a função que representa a série no intervalo $(2-R, 2+R)$, onde R é o raio de convergência.(**Dica: derive a série uma vez**).

Questão 3: (2,5 pontos) Considere a equação diferencial ordinária:

$$3xy'' + y' + 2xy = 0.$$

a) Demonstre que $x = 0$ é um ponto singular regular dessa equação.

b) Determine as raízes da equação indicial da equação diferencial.

c) Determine a relação de recorrência da solução em série potências em torno de $x = 0$ associada **à maior das duas raízes** da equação indicial.

Questão 4: (2.5 pontos) Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 3y = u_1(t)e^{t-1} \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 0, \end{cases}$$

onde $u_1(t)$ é a função degrau unitário com descontinuidade em 1.

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\dfrac{1}{s},\ s > 0$
$t^m\ (m \in \mathbb{N})$	$\dfrac{m!}{s^{m+1}},\ s > 0$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a},\ s > a$
$t^m e^{at}\ (m \in \mathbb{N})$	$\dfrac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s > a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$\operatorname{senh}(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$