TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (2.5 pontos)

1. Determine se a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\log(n)}$ é (condicionalmente ou absolutamente) convergente, ou divergente.
2. Para quais das seguintes séries o Teste de Razão não é conclusivo?

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \quad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}, \quad (d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}.$$

Solução:

1. Primeiro usamos o teste da série alternada. A função $f(x) = \frac{1}{x\log(x)} = (x\log(x))^{-1}$ satisfaz

$$f'(x) = -(x\log(x))^{-2}(\log(x)+1) < 0,$$

então f é decrescente e a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\log(n)} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$ satisfaz $a_n \geq a_{n+1} > 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, e é necessariamente convergente.

A série não é absolutamente convergente pelo teste de integral. Consideramos a integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\log(x)}dx = \int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{t}dt = \infty,$$

e concluimos que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$ também é divergente.

2. (a)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)^3} = 1,$$

e o teste não é conclusivo.

2. (b)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

e o teste é conclusivo.

2. (c)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n-1}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 3 > 1$$

e o teste é conclusivo.

2. (d)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\frac{1+n^2}{1+(n+1)^2} = 1$$

e o teste de Razão não é conclusivo.

Questão 2: (2.5 pontos)

Considere a equação diferencial

$$(x-\frac{\pi}{2})y''+\cos(x)y'+(x-\frac{\pi}{2})^2y=0.$$

1. Demonstre que o ponto $x=\pi/2$ é um ponto ordinario da equação.
2. Se $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\frac{\pi}{2})^n$ é uma solução da equação, determine as equações lineares que relacionam os primeiros coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3.

Solução:

1. A função $f(x)=\cos(x)$ é analítica e pode ser representada por sua série de Taylor em $x_0=\frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}(x-\frac{\pi}{2})^{2n-1},\\ &= -(x-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{2})^3-\frac{1}{5!}+\cdots.\end{aligned}$$

Logo, a equação $(x-\frac{\pi}{2})y''+\cos(x)y'+(x-\frac{\pi}{2})^2y=0$ é equivalente à equação diferencial

$$y''-\left(\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-\frac{\pi}{2})^{2n}\right)y'+(x-\frac{\pi}{2})y=0.$$

Os coeficientes de y e y' são funções analíticas em torno de $\frac{\pi}{2}$, então $x_0=\frac{\pi}{2}$ é um ponto ordinário da equação.

2. Se $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\frac{\pi}{2})^n$, então calculamos

$$\begin{aligned}(x-\frac{\pi}{2})y &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\frac{\pi}{2})^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}(x-\frac{\pi}{2})^n,\\ y' &= \sum_{n=1}^{\infty}a_n n(x-\frac{\pi}{2})^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}(n+1)(x-\frac{\pi}{2})^n,\\ y'' &= \sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)(x-\frac{\pi}{2})^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)(x-\frac{\pi}{2})^n\end{aligned}$$

e consideramos a longa equação diferencial

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)(x-\frac{\pi}{2})^n\right)\\ &\quad-\left(\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-\frac{\pi}{2})^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}(n+1)(x-\frac{\pi}{2})^n\right)\\ &\quad+\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}(x-\frac{\pi}{2})^n\right)=0\end{aligned}$$

O termo constante nessa expressão vem do termo constante no primeiro termo, mais o produto dos termos constantes no produto no meio. Isso é,

$$2a_2-1\times a_1=0.$$

O coeficiente de $(x - \frac{\pi}{2})$ na longa equação vem dos termos lineares no primeiro e o último termos, junto com um produto do termo no meio :

$$6a_3 - 1 \times 2a_2 + a_0 = 0.$$

O próximo coeficiente vai involver o termo a_4, então terminamos aqui. As equações lineares são

$$\begin{aligned} 2a_2 - a_1 &= 0, \\ 6a_3 - 2a_2 + a_0 &= 0. \end{aligned}$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere a equação diferencial ordinária

$$2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0.$$

1. Demonstre que $x = 0$ é um ponto singular regular dessa equação.
2. Determine as raízes da equação indicial da equação diferencial.
3. Determine a relação de recorrência para os coeficientes da série de potências em torno de $x = 0$ da solução $y(x)$ que corresponde com à *maior* das duas raízes da equação indicial.

Solução:

1. Lembrando a última questão, não é suficiente observar que o coeficiente de y'' anula-se em $x = 0$ para afirmar que isso é um ponto singular. Ao invés disso, para $P(x) = 2x^2$, $Q(x) = 3x$ e $R(x) = 2x^2 - 1$, temos que $Q(x)/P(x) = 3/2x$ que não é analítica em torno de $x = 0$, então podemos concluir que $x = 0$ é um ponto singular. Porém,

$$\lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = 3/2, \text{ e } \lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{-1}{2}$$

então $x = 0$ é um ponto singular regular.

2. e 3. Suponha que $y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$. Então calculamos

$$\begin{aligned} x^2y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n+r}, \\ xy' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r}, \\ x^2y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y, \\ &= \Big(2r(r-1) + 3r - 1\Big)a_0x^r + \Big(2(r+1)r + 3(r+1) - 1\Big)a_1x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\Big((2(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) - 1)a_n + 2a_{n-2}\Big)x^{n+r}. \end{aligned}$$

Logo, a equação indicial é $2r(r-1)+3r-1 = 2r^2+r-1 = (2r-1)(r+1) = 0$ e as raízes da equação indicial são $r=-1$ e $r=1/2$. A relação de recorrência associada à raíz $r=1/2$ é

$$a_n = \frac{-2a_{n-2}}{2(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})+3(n+\frac{1}{2})-1} = \frac{-2a_{n-2}}{2n^2+3n}$$

para $n \geq 2$. Também observamos que é necessário ter $a_1 = 0$.

Questão 4: (2.5 pontos)

Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução $y(t)$ do seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x'(t)+2y'(t)-2y(t) = t, \\ x(t)+y'(t)-y(t) = 1, \end{cases}$$

com condições iniciais $x(0) = y(0) = 0$.

Solução:

Na segunda equação acima, colocamos $t=0$ para ver que $0+y'(0)-y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$. Diferenciando a segunda equação, temos $x'+y''-y' = 0$. Então, podemos retirar x' da expressão ao fazer a diferença com a primeira equação. Obtemos

$$y''-3y'+2y = -t, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1.$$

Aplicando a transformada de Laplace, se $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$,

$$\begin{aligned} (s^2-3s+2y)Y(s)-1 &= -1/s^2, \\ Y(s) &= \frac{s^2-1}{(s^2-3s+2)s^2}, \\ &= \frac{s+1}{s^2(s-2)}. \end{aligned}$$

Simplificamos isso usando frações parciais

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-2}, \\ \frac{s+1}{s^2(s-2)} &= \frac{As(s-2)+B(s-2)+cs^2}{s^2(s-2)}, \\ s+1 &= (A+C)s^2+(B-2A)s-SB. \end{aligned}$$

Então o sistema de equações lineares $A+C=0$, $B-2A=1$, $-2B=1$ tem soluções $A=-3/4$, $B=-1/2$ e $C=3/4$. Temos

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{-3}{4}\frac{1}{s}-\frac{1}{2s^2}+\frac{3}{4}\frac{1}{s-2}, \\ y(t) &= \frac{-3}{4}-\frac{t}{2}+\frac{3}{4}e^{2t}. \end{aligned}$$

Juntando isso com a segunda equação acima, obtemos

$$x(t) = \frac{3}{4}-\frac{t}{2}-\frac{3}{4}e^{2t}.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>0$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>0$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-...-f^{(m-1)}(0)$

Integrais úteis.

$$\int x^m\cos(\alpha x)dx=\frac{x^m}{\alpha}\text{sen}(\alpha x)-\frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\text{sen}(\alpha x)dx$$
$$\int x^m\text{sen}(\alpha x)dx=-\frac{x^m}{\alpha}\cos(\alpha x)+\frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\cos(\alpha x)dx$$

O problema

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0\\ y(0)=0, y(L)=0\end{cases}$$

tem autovalores $\lambda=n^2\pi^2/L^2$, $n\in\mathbb{N}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x)=\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$