Instituto de Matemática - IM-UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral IV - MAC248
Primeira prova - Unificada - 29/04/2019

TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (2.5 pontos)

1. Determine se a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\log(n)}$ é (condicionalmente ou absolutamente) convergente, ou divergente.
2. Para quais das seguintes séries o Teste de Razão não é conclusivo?

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \quad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}, \quad (d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}.$$

Questão 2: (2.5 pontos)
Considere a equação diferencial

$$(x-\frac{\pi}{2})y'' + \cos(x)y' + (x-\frac{\pi}{2})^2 y = 0.$$

1. Demonstre que o ponto $x = \pi/2$ é um ponto ordinario da equação.
2. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\frac{\pi}{2})^n$ é uma solução da equação, determine as equações lineares que relacionam os primeiros coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3.

Questão 3: (2.5 pontos)
Considere a equação diferencial ordinária

$$2x^2y'' + 3xy' + (2x^2-1)y = 0.$$

1. Demonstre que $x = 0$ é um ponto singular regular dessa equação.
2. Determine as raízes da equação indicial da equação diferencial.
3. Determine a relação de recorrência para os coeficientes da série de potências em torno de $x = 0$ da solução $y(x)$ que corresponde com à *maior* das duas raízes da equação indicial.

Questão 4: (2.5 pontos)
Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução $y(t)$ do seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x'(t) + 2y'(t) - 2y(t) = t, \\ x(t) + y'(t) - y(t) = 1, \end{cases}$$

com condições iniciais $x(0) = y(0) = 0$.

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.	
f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>0$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>0$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-...-f^{(m-1)}(0)$

Integrais úteis.

$$\int x^m\cos(\alpha x)dx=\frac{x^m}{\alpha}\operatorname{sen}(\alpha x)-\frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\operatorname{sen}(\alpha x)dx$$
$$\int x^m\operatorname{sen}(\alpha x)dx=-\frac{x^m}{\alpha}\cos(\alpha x)+\frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\cos(\alpha x)dx$$

O problema

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0\\ y(0)=0, y(L)=0\end{cases}$$

tem autovalores $\lambda=n^2\pi^2/L^2$, $n\in\mathbb{N}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$