TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (3 pontos)

Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^3+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log_e(n)^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$

Questão 2: (2 pontos)

Considere a seguinte função:

$$h(x) := \int_0^x \frac{1}{y}\log_e\left(\frac{1-y}{1+y}\right)dy.$$

(a) Encontre a série de Taylor em torno de zero dessa função.

(b) Determine o raio de convergência da série encontrada em (a).

Questão 3: (2 pontos)

Considere a seguinte EDO:

$$x^2y'' + (x-1)y' + (x+1)y = 0.$$

(a) Mostre que $x_0 = 1$ é ponto ordinário dessa equação.

(b) Determine a relação de recorrência da solução em séries dessa equação em torno desse ponto.

(c) Determine uma cota inferior para o raio de convergência da série encontrada em (b).

Questão 4: (3 pontos)

(a) Esboce o gráfico da seguinte função no intervalo $[0, 2]$:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{se } 0 \leq x < 1, \text{ e} \\ 0 & \text{se } 1 \leq x. \end{cases}$$

(b) Determine a transformada de Laplace da função dada no item (a).

(c) Determine a transformada de Laplace inversa da seguinte função:

$$F(t) = \frac{(2t^3 - 2t^2 + t)e^{-t}}{(t^2 - 2t + 2)(t^2 - 1)}.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A - Propriedades básicas do logaritmo e do exponencial.

$$\begin{aligned}\log_e(1) &= 0,\\ \log_e(ab) &= \log_e(a)+\log_e(b),\\ \exp(0) &= 1 \text{ e}\\ \exp(a+b) &= \exp(a)\exp(b).\end{aligned}$$

B - Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$t^m e^{at}\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s>a$
$\mathrm{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\mathrm{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$\mathrm{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-...-f^{(m-1)}(0)$