UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Primeira Prova Unificada de Cálculo IV- 2017/1, 02/05/2017

Questão 1: (2.5 pontos)

(a) Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência da série abaixo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos(3n)}{3^n}$.

(b) Determine o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$.

(c) A série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m(\log m)^2}$ é convergente ou divergente? Justifique.

Questão 2: (2,5 pontos)

Considere a função

$$f(x) := \int_0^x \frac{1}{y} \arctan(y) dy.$$

(a) Encontre a série de MacLaurin de essa função.
Dica: Determine primeiro a série de MacLaurin de $\arctan(y)$.

(b) Encontre $f^{(10)}(0)$ (a derivada de ordem 10 da função f em $x = 0$).

Questão 3: (2,5 pontos) Considere a seguinte equação de Chebyshev.

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0.$$

(a) Mostre que 1 é ponto singular regular de essa equação.

(b) Determine as raízes da equação indicial de essa equação.

(c) Determine a relação de recorrência da solução em série de essa equação que corresponde à maior das duas raízes encontradas no item b).

Question 4: (2.5 pontos)

Utilize a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = e^t + \delta(t-1)e^{2t}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

onde $\delta(t-1)$ é a “função”delta de Dirac com singularidade em 1.

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$t^m e^{at}\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s>a$
$\mathrm{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\mathrm{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$\mathrm{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-...-f^{(m-1)}(0)$