UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Primeira Prova Unificada de Cálculo IV- 2016/2, 03/11/2016

Questão 1: (2.5 pontos)

(a) (1.0) Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{n^4-1}$.

(b) (1.0) Determine o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n\sqrt{n}} x^n$.

(c) (0.5) Estude a convergência ou divergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

Questão 2: (2,5 pontos)
Considere a equação de Euler

$$x^2y'' + 3x\,y' + \alpha y = 0.$$

Determine todos os valores de α para os quais existe ao menos uma solução $y(x)$ dessa equação tal que $\lim\limits_{x\to 0^+} y\,(x) = 0$.

Questão 3: (2,5 pontos)

Considere a seguinte equação de Legendre.

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0.$$

(a) (0.5) Mostre que 0 é ponto regular de essa equação.

(b) (1.5) Determine a relação de recorrência das soluções em séries de essa equação em torno de 0.

(c) (0.5) Determine o raio de convergência da solução que satisfaz ás condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

Question 4: (2.5 pontos)
Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do seguinte problema de valor inicial

$$y'' + 4y = cos(t) + \delta(t-\pi); \quad \text{com} \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$t^m e^{at}\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s>a$
$\mathrm{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\mathrm{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$\mathrm{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-...-f^{(m-1)}(0)$