TEMPO DE PROVA: 2h

Questão 1: (2.5 pontos)

Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1+\ln(m)}{m^2+1}$.

Solução:

O m-ésimo termo da série é

$$a_m := \frac{1+\ln(m)}{m^2+1}.$$

Comparando com a série com m-ésimo termo

$$b_m := \frac{\ln(m+1)}{(m+1)^2},$$

temos

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{b_m}{a_m} = \lim_{m\to+\infty} \frac{\ln(m+1)}{(m+1)^2} \frac{(m^2+1)}{(\ln(m)+1)} = 1.$$

Segue pelo teste de comparação no limite que essas 2 séries têm as mesmas propriedades de convergência. Agora, seja

$$f(t) = \frac{\ln(t+1)}{(t+1)^2}.$$
$$\therefore \quad f'(t) = \frac{1+2\ln(t+1)}{(t+1)^3}.$$

Vemos que essa função é positiva e decrescente no intervalo $[\sqrt{e}-1, \infty)$. Como $e < 4$, temos $\sqrt{e} < 2$, e $\sqrt{e}-1 < 1$, e esse intervalo contém o intervalo $[1, \infty)$. Finalmente

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(t+1)}{(t+1)^2} dt = \left[\frac{-\ln(t+1)-1}{(t+1)}\right]_1^{\infty} = \frac{\ln(2)+1}{2}.$$

Como essa integral existe, segue pelo teste da integral que as 2 séries convergem. Enfim, como a série é positiva, converge absolutamente.

(b) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{\sqrt{m^4+1}}$.

Solução:

Trata-se de uma série alternada. O m-ésimo termo da série é

$$a_m := \frac{(-1)^m m}{\sqrt{m^4+1}} = (-1)^m f(m),$$

onde

$$f(t) = \frac{t}{\sqrt{t^4+1}}.$$
$$\therefore \quad f'(t) = \frac{1-t^4}{\sqrt{t^4+1}^3}.$$

Vemos que essa função é positiva e decrescente no intervalo $[1, \infty)$, e

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0.$$

Segue pelo teste da série alternada que essa série é convergente. Agora, substituindo $t^2 = s$, temos

$$\int_1^\infty \frac{t}{\sqrt{t^4+1}} dt = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} ds = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arcsenh}(s)\right]_1^\infty = \infty.$$

Segue pelo teste da integral que a série

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\sqrt{m^4+1}}$$

é divergente. Logo a série é condicionalmente convergente.

(c) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)\ln(m+1)^3}$.

Solução:
O m-ésimo termo é

$$a_m := \frac{1}{(m+1)\ln(m+1)^3} = f(m),$$

onde

$$f(t) := \frac{1}{(t+1)\ln(t+1)^3}.$$

Essa função é positiva e decrescente no intervalo $[1, \infty)$. Substituindo $s = \ln(t+1)$, temos

$$\int_1^\infty \frac{1}{(t+1)\ln(t+1)^3} dt = \int_{\ln(2)}^\infty \frac{1}{s^3} ds = \left[-\frac{1}{2s^2}\right]_{\ln(2)}^\infty = \frac{1}{2\ln(2)^2}.$$

Segue da teste do integral que essa série converge absolutamente.

Questão 2: (2.5 pontos)
Considere a função

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right).$$

(a) Determine a série de MacLaurin dessa função.

Solução:
Derivando, e usando a série geométrica, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4}{1-4x^2} \\ &= 4\sum_{m=0}^{\infty} 2^{2m}x^{2m}. \end{aligned}$$

Integrando, temos

$$f(x) = 4\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{2m}x^{2m+1}}{2m+1} + C,$$

e, avaliando em $x=0$, temos $C=0$. Assim

$$\ln\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{2(m+1)}x^{2m+1}}{2m+1}.$$

(b) Determine o raio de convergência dessa série.

Solução:
O m'esimo termo da série de MacLaurin de f é

$$a_m := \frac{2^{2(m+1)}x^{2m+1}}{(2m+1)}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \lim_{m\to+\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| &= \lim_{m\to+\infty}\left|\frac{2^{2(m+2)}x^{2m+3}}{(2m+3)}\frac{2m+1}{2^{2(m+1)}x^{(2m+1)}}\right| \\ &= \lim_{m\to+\infty}\left|4x^2\frac{(2m+1)}{(2m+3)}\right| \\ &= 4\left|x\right|^2. \end{aligned}$$

Segue pelo teste da razão que essa série é convergente para $|x| < 1/2$ e divergente para $|x| > 1/2$. O raio de convergência é então $1/2$.

Questão 3: (2.5 pontos)
Considere a equação de Euler com parâmetro

$$x^2y'' + xy' + \beta y = 0.$$

Encontre todos os valores de β para os quais existe ao menos uma solução $y(x)$ que satisfaz $\lim_{x\to 0} y(x) = \infty$.

Solução:
A equação indicial é

$$\begin{aligned} & r(r-1)+r+\beta = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & r^2+\beta = 0. \end{aligned}$$

Temos 3 casos, segundo o sinal de β.

1 **Caso** $\beta < 0$ **:** A equação indicial tem 2 raízes reais distintas. A solução geral é

$$y = Ax^{\sqrt{|\beta|}} + Bx^{-\sqrt{|\beta|}}.$$

Em particular, toda solução com $B > 0$ tem limite $+\infty$ em 0.

2 **Caso** $\beta = 0$ **:** A equação indicial tem 1 raiz real repetido. A solução geral é

$$y = A + B\ln(x).$$

Em particular, toda solução com $B < 0$ tem limite $+\infty$ em 0.

3 **Caso** $\beta > 0$ **:** A equação indicial tem 2 raízes imaginárias. A solução geral é

$$y = A\cos(\sqrt{\beta}\ln(x)) + B\mathrm{sen}(\sqrt{\beta}\ln(x)).$$

Em particular, toda solução é limitada quando x tende a 0.

Recolhendo os casos em que o limite pode ser ∞, temos que isso pode acontecer para $\beta \leq 0$.

Questão 4: (2.5 pontos)
Considere a equação

$$3x^2y'' + 5xy' + (x^2-1)y = 0.$$

(a) Mostre que 0 é ponto singular regular dessa equação.

Solução:
A equação é

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^2, \\ Q(x) &= 5x,\ e \\ R(x) &= x^2-1. \end{aligned}$$

Como $P(0) = 0$, o ponto $x_0 = 0$ é ponto singular da equação. Logo

$$\begin{aligned} q(x) &:= \tfrac{xQ(x)}{P(x)} = \tfrac{5}{3}, e \\ r(x) &:= \tfrac{x^2R(x)}{P(x)} = \tfrac{x^2-1}{3}. \end{aligned}$$

Como essas funções são analíticas em $x_0 = 0$, esse ponto é ponto singular regular da equação.

(b) Determine as raízes da equação indicial dessa equação.

Solução:
Como $q(0) = 5/3$ e $r(0) = -1/3$, a equação de Euler associada é

$$x^2y'' + \frac{5}{3}xy' - \frac{1}{3}y = 0.$$

A equação indicial é então

$$\begin{aligned} & r(r-1) + \frac{5}{3}r - \frac{1}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3r^2 + 2r - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow\ & (3r-1)(r+1) &= 0, \end{aligned}$$

e as raízes são -1 e $1/3$.

(c) Determine a relação de recorrência para os coeficientes da série de potências em torno de $x = 0$ da solução $y(x)$ que corresponde à *menor* das duas raízes da equação indicial.

Solução:
A menor das duas raízes é $r = -1$. A solução tem então a forma

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m-1},$$

onde $a_0 \neq 0$. Derivando aquilo, temos

$$\begin{aligned} y' &= \textstyle\sum_{m=0}^{\infty}(m-1)a_m x^{m-2}, \\ y'' &= \textstyle\sum_{m=0}^{\infty}(m-1)(m-2)a_m x^{m-3}. \end{aligned}$$

Substituindo para y na equação, temos

$$3x^2\sum_{m=0}^{\infty}(m-1)(m-2)a_m x^{m-3} + 3x\sum_{m=0}^{\infty}(m-1)a_m x^{m-2} + (x^2-1)\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{m=0}^{\infty}3(m-1)(m-2)a_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty}5(m-1)a_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+1} - \sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=-1}^{\infty}3n(n-1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=-1}^{\infty}5na_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n - \sum_{n=-1}^{\infty}a_{n+1}x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow -a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(3n(n-1)a_{n+1} + 5na_{n+1} + a_{n-1} - a_{n+1}\right)x^n = 0$$

Igualando coeficientes, temos então

$$a_1 = 0,$$

e, para todo $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{-a_{n-1}}{(3n-1)(n+1)}.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.