UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Primeira Prova Unificada de Cálculo IV - 2025/2, 02/10/2025

Questão 1:(2,5 pontos)

(a) Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \operatorname{sen}(4n)}{4^n}$.

(b) Determine o raio de convergência da série de potências $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{(2k)!} x^{2k}$.

(c) A série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^2}{(2k+1)(k+3)}$ é convergente ou divergente? Justifique.

Questão 2:(2,5 pontos) Considere a função

$$f(x) = \int_0^x \frac{\cos(2t) - 1}{t}\, dt.$$

a) Expresse $f(x)$ como uma série de Taylor centrada em $x = 0$.

b) Calcule $f^{(8)}(0)$, isto é, a derivada de oitava ordem de $f(x)$ calculada em 0.

Questão 3:(2,5 pontos) Considere a equação diferencial ordinária:

$$x^2 y'' - xy' + xy = 0.$$

a) Demonstre que $x = 0$ é um ponto singular regular dessa equação.

b) Determine a relação de recorrência entre os coeficientes c_n da solução em série potências em torno de $x = 0$ associada **à maior das duas raízes** da equação indicial.

c) Calcule os quatro primeiros coeficientes desta série quando $c_0 = 1$.

Questão 4:(2.5 pontos) Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + y = g(t) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1, \end{cases}$$

onde g é a função $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq t < 1 \\ e^{t-1} & \text{se} \quad 1 \leq t \end{cases}$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$t^m e^{at}\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s>a$
$\mathrm{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\mathrm{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$\mathrm{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-...-f^{(m-1)}(0)$