



Gabarito da Prova Final Unificada de Cálculo IV - 2025/2, 28/11/2025

Questão 1: (2,5 pontos) Considere a função $f(x)$ definida pela série de potências

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{4^n(2n)!} x^{2n+1}.$$

(a) Calcule o raio de convergência da série que define $f(x)$.

(b) Calcule $f^{(5)}(0)$ e $f^{(6)}(0)$.

Solução:

a) Seja $a_n = \frac{(n!)^2}{4^n(2n)!} x^{2n+1}$. Usamos o Teste da Razão

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1.$$

$$a_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2}{4^{n+1}(2n+2)!} x^{2(n+1)+1} = \frac{((n+1)!)^2}{4^{n+1}(2n+2)!} x^{2n+3}.$$

Logo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{((n+1)!)^2}{4^{n+1}(2n+2)!} x^{2n+3}}{\frac{(n!)^2}{4^n(2n)!} x^{2n+1}}.$$

Simplificando os coeficientes:

$$\begin{aligned} & \frac{((n+1)!)^2}{4^{n+1}(2n+2)!} \cdot \frac{4^n(2n)!}{(n!)^2} = \frac{((n+1)!)^2}{4(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\ &= \frac{(n+1)^2(n!)^2}{4(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{4(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{8(n+1)(2n+1)} = \frac{n+1}{8(2n+1)}. \end{aligned}$$

Simplificando as potências de x :

$$\frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}} = x^2.$$

Logo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{8(2n+1)} x^2.$$

Tomando valor absoluto:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n+1}{8(2n+1)} |x|^2.$$

Computando o limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{8(2n+1)} |x|^2 = |x|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{8(2n+1)} = \frac{1}{16} |x|^2.$$

Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{16} |x|^2.$$

Usando o Teste da Razão:

$$\frac{1}{16} |x|^2 < 1.$$

segue que:

$$|x|^2 < 16 \implies |x| < 4.$$

Portanto, o raio de convergência é $R = 4$.

b) Se $f(x)$ é expressa em série de potências como $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$, então $c_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$, ou seja, $f^{(m)}(0) = m! c_m$. Assim, $f^{(5)}(0) = 5! c_5$. Note que $2n+1 = 5$ ocorre quando $n = 2$. Logo,

$$f^{(5)}(0) = 5! \frac{(2!)^2}{4^2(2.2)!} = \frac{5! \cdot 4}{4^2 4!} = \frac{5}{4}.$$

Note, por outro lado, que $2n+1$ é sempre ímpar, donde não existem potências pares na série dada. Segue que $f^{(6)}(0) = 0$.

Questão 2: (2,5 pontos) Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

(a) Encontre a série de Fourier em senos de período 4 de f .

(b) Esboce o gráfico da função para a qual a série converge no intervalo $[-6, 6]$.

Solução:

a) Série de Fourier em senos de período 4

Como se trata de uma série de senos, temos

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right),$$

onde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad L = 2.$$

Assim,

$$b_n = \int_0^2 f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) dx.$$

Dividindo a integral nos dois trechos da definição de f :

$$b_n = \int_0^1 x \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) dx + \int_1^2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) dx.$$

Cálculo da primeira integral por partes:

$$\int_0^1 x \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) dx = -\frac{2x}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \Big|_0^1 + \frac{4}{(n\pi)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \Big|_0^1.$$

A segunda integral é direta:

$$\int_1^2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) dx = -\frac{2}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \Big|_1^2.$$

Reunindo os termos, obtém-se:

$$b_n = -\frac{2}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \frac{4}{(n\pi)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \frac{2}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \frac{2}{n\pi} \cos(n\pi).$$

Cancelando os termos:

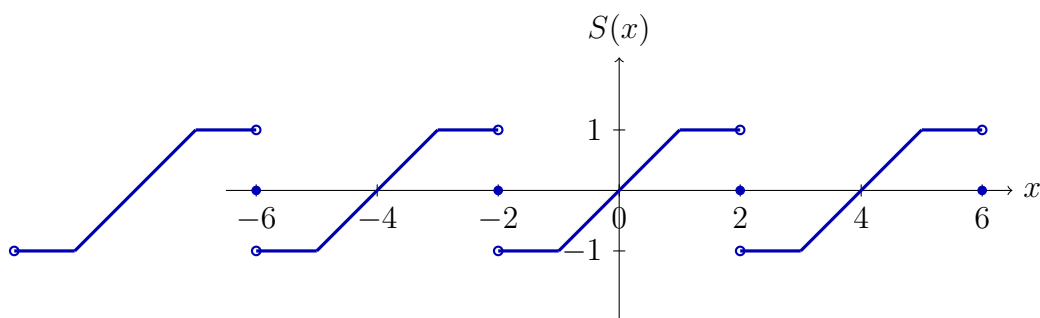
$$b_n = \frac{4}{(n\pi)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \frac{2}{n\pi} (-1)^n.$$

Portanto, a série de Fourier em senos da função f é:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{(n\pi)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \frac{2(-1)^n}{n\pi} \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right)$$

b) A série de Fourier $S(x)$ converge:

- os valores originais da função f nos pontos de continuidade;
- à média dos limites laterais nos pontos de descontinuidade;



Questão 3: (2,5 pontos) Considere um sistema massa-mola com amortecimento, inicialmente em repouso, modelado pela equação diferencial abaixo. No instante $t = \pi$, o sistema recebe uma força impulsiva unitária, representada pela função delta de Dirac $\delta(t - \pi)$. Resolva o seguinte problema de valor inicial usando a transformada de Laplace:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \pi \delta(t - \pi), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solução:

a) Lembrando que

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0), \quad \mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0),$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.

Aplicamos a transformada de Laplace na equação diferencial:

$$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \pi\mathcal{L}\{\delta(t - \pi)\}.$$

Substituindo nas condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$:

$$(s^2Y(s) - 0 - 0) + 2(sY(s) - 0) + 2Y(s) = \pi e^{-\pi s}.$$

Portanto:

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) = \pi e^{-\pi s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{\pi e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2}.$$

Completamos o quadrado no denominador $s^2 + 2s + 2 = (s + 1)^2 + 1$, então:

$$Y(s) = \frac{\pi e^{-\pi s}}{(s + 1)^2 + 1}.$$

Sabemos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}\right\} = e^{at} \sin(bt).$$

No nosso caso, $a = -1$ e $b = 1$, logo:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \right\} = e^{-t} \operatorname{sen} t.$$

Por outro lado sabemos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u_a(t)f(t-a),$$

onde $u_a(t)$ é a função degrau de Heaviside. No nosso caso $a = \pi$. Portanto:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \pi \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2 + 1} \right) = \pi \mathcal{L}^{-1} \left(e^{-\pi s} \mathcal{L} (e^{-t} \operatorname{sen} t) (s) \right), \\ y(t) &= \pi u_{\pi}(t) e^{-(t-\pi)} \operatorname{sen}(t-\pi). \end{aligned}$$

Questão 4: (2.5 pontos) Usando o método de separação de variáveis e justificando todas as etapas, determine a solução do problema:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, & 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \operatorname{sen}(\pi x) + \operatorname{sen}(3\pi x), & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Solução

Procuramos soluções da forma

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Substituindo na equação $u_{xx} = u_{tt}$:

$$X''T = XT'' \quad \Rightarrow \quad \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Assim obtemos dois EDO's.

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \\ T'' + \lambda T &= 0. \end{aligned}$$

Note que $u(0, t) = 0 \implies X(0) = 0$, $u(2, t) = 0 \implies X(2) = 0$.

A primeira EDO:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(2) = 0.$$

tem soluções não triviais somente quando

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

com autofunções

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

A segunda EDO:

$$T'' + \lambda_n T = 0,$$

tem solução geral:

$$T_n(t) = A \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right).$$

Note que $u(x, 0) = 0 \implies T(0) = 0$. E que $T(0) = 0 \implies A = 0$.

Logo

$$T_n(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A solução geral é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Vamos usar agora a condição $u_t(x, 0) = \operatorname{sen}(\pi x) + \operatorname{sen}(3\pi x)$.

Derivando $u(x, t)$ em relação a t e avaliando em $t = 0$:

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Logo

$$\operatorname{sen}(\pi x) + \operatorname{sen}(3\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Note que:

$$\operatorname{sen}(\pi x) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{2}\right), \quad \operatorname{sen}(3\pi x) = \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi x}{2}\right),$$

logo apenas os coeficientes $n = 2$ e $n = 6$ aparecem.

Para $n = 2$:

$$k_2 \frac{2\pi}{2} = k_2 \pi = 1 \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{1}{\pi}.$$

Para $n = 6$:

$$k_6 \frac{6\pi}{2} = k_6 3\pi = 1 \quad \Rightarrow \quad k_6 = \frac{1}{3\pi}.$$

Os demais coeficientes são nulos.

Solução final:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi t) \operatorname{sen}(\pi x) + \frac{1}{3\pi} \operatorname{sen}(3\pi t) \operatorname{sen}(3\pi x).$$

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$
$t^m (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}}, s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$
$t^m e^{at} (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, s > a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
$e^{at}\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, s > a $
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, s > a $
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - \dots - f^{(m-1)}(0)$

A. O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$